M109 – Examen du 9 janvier 2008

durée de l'épreuve: 3h

Aucun document n'est autorisé. L'usage de la calculatrice est interdit.

Les exercices sont indépendants.

Exercice I

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ espace euclidien. On désigne par $\| \cdot \|$ la norme associée au produit scalaire. Soit $v \in E$ un vecteur non nul, et $\lambda \in \mathbb{R}$ un scalaire. On considère l'endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ défini par:

$$u(x) = x + \lambda \langle x, v \rangle v \quad \text{pour tout } x \in E.$$

1. a) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Rappeler la caractérisation de l'adjoint de f.

   b) Montrer que u est autoadjoint.

2. a) Soit $x \in E$. Calculer $\|u(x)\|^2$.

   b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur λ et v pour que u soit un endomorphisme orthogonal.

3. a) Soit $f \in \mathcal{O}(E)$. Montrer que le spectre de f est inclus dans l'ensemble $\{-1, 1\}$.

   b) On suppose que $u \in \mathcal{O}(E)$ et que $\lambda \neq 0$. Montrer que le spectre de u est l'ensemble $\{-1, 1\}$. Donner une interprétation géométrique de u.

Exercice II

Soit $a, b \in \mathbb{C}$. On considère les matrices:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix}.$$

1. Pour cette question uniquement, on suppose que $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que A est diagonalisable.

2. Exprimer A en fonction de a, b, U et I_4.

3. En déduire une expression de A^2 en fonction de a, b, U et I_4.

4. En déduire que le polynôme $Q = X^2 - 2(a+b)X + (a-b)(a+3b)$ annule A.

5. Montrer que A est diagonalisable.

6. Déterminer une matrice $D \in M_4(\mathbb{C})$ diagonale et une matrice $P \in GL_4(\mathbb{C})$ telles que:

$$A = PDP^{-1}.$$

Exercice III

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 2. On définit les applications φ, φ_1, φ_2, φ_3 de E dans $\mathbb{R}$ par:

$$\varphi(P) = \int_0^1 P(t)dt, \quad \varphi_1(P) = P(0), \quad \varphi_2(P) = P(1), \quad \varphi_3(P) = P'(0), \quad \text{pour tout } P \in E.$$

1. Montrer que $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est une base de E^*.

2. Déterminer la base (u_1, u_2, u_3) antéduale de $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$.

3. a) Montrer qu'il existe des réels $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tels que $\varphi = \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \alpha_3\varphi_3$

   b) Montrer que pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, $\alpha_i = \int_0^1 u_i(t)dt$.

   c) Calculer α_i pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$.

Fin