UNIVERSITÉ PAUL CÉZANNE **2006/2007**

M109 – Examen du ?? juin 2008

durée de l'épreuve: 3h

Aucun document n'est autorisé. L'usage de la calculatrice est interdit.

Les exercices sont indépendants.

Exercice I

Soit $A = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

1. a) Justifier que A est diagonalisable dans une base orthonormée.

   b) Déterminer une matrice $O \in SO_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in M_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que:
   $$A = OD{}^tO.$$

   c) On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Déterminer et tracer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points X de $\mathbb{R}^2$ vérifiant l'équation:
   $${}^tXAX = 1.$$

2. La matrice A est-elle la matrice d'un produit scalaire?

Exercice II

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On définit l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ par:

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)t^2 dt \quad \text{pour} \quad P, Q \in E.$$

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E. On notera $\| \cdot \|$ la norme associée.

2. Soit $F = \mathbb{R}_1[X]$ le sous-espace de E formé des polynômes de degré inférieur ou égal à 1. Appliquer le procédé de Schmidt à la base $(1, X)$ de F pour obtenir une base orthonormée (u_0, u_1) de F.

3. Soit $\pi : E \to E$ la projection orthogonale sur F. Déterminer $\alpha_0,\ \alpha_1 \in \mathbb{R}$ tels que
   $$\pi(X^2) = \alpha_0 u_0 + \alpha_1 u_1.$$

4. En déduire la valeur de $\|\pi(X^2)\|^2$.

5. Calculer
   $$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 t^2 dt.$$

Exercice III

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie tel que

$$f^4 = f^2 + f.$$

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f^3 - f - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker} f = E$.

2. a) Montrer que $\mathrm{Im}\, f \subseteq \mathrm{Ker}(f^3 - f - \mathrm{Id})$.

   b) En déduire que $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Ker}(f^3 - f - \mathrm{Id})$.

Fin