UNIVERSITÉ PAUL CÉZANNE **FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES**

M109 — Algèbre linéaire 2

Travaux dirigés

2007–2008

Sommaire

1. Sommes directes, projections

Exercice 1. Déterminer pour quelles valeurs de $t \in \mathbb{R}$ les vecteurs $x_1 = (1, 0, t), x_2 = (t, 0, 1)$ et $x_3 = (0, t, 1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2. On considère dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs $x_1 = (1, -1, 1, 2), x_2 = (0, 2, 0, 0), x_3 = (1, -1, 2, 2)$ et $x_4 = (1, -1, 2, 3)$.
a) Vérifier que $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
b) Calculer dans la base $\mathcal{X}$ les composantes des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
c) Calculer dans la base $\mathcal{X}$ les composantes d'un élément quelconque de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 3. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré $\leq n$.
a) Soit $P_0, P_1, ..., P_n$ des polynômes de E tels que $\deg P_k = k$ (pour $0 \leq k \leq n$). Montrer que $(P_0, P_1, ..., P_n)$ est une base de E.
b) Soit P un polynôme de degré n. Montrer que $(P, P', \ldots, P^{(n)})$ est une base de E. Soit $a \in \mathbb{R}$; déterminer les composantes du polynôme Q défini par $Q(X) = P(X + a)$ dans la base $(P, P', \ldots, P^{(n)})$.

Exercice 4. On considère dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs $x_1 = (1, 2, 3, 0)$, $x_2 = (-1, 1, 2, 1)$, $x_3 = (5, 1, 0, -3)$, $y_1 = (0, 3, 5, 1)$, $y_2 = (1, -1, 1, 0)$, $y_3 = (0, 0, 3, 1)$. On désigne par $F = \mathrm{Vect}\{x_1, x_2, x_3\}$ le sous-espace engendré par x_1, x_2 et x_3 et par $G = \mathrm{Vect}\{y_1, y_2, y_3\}$ celui engendré par y_1, y_2 et y_3. Donner une base des sous-espaces suivants: F, G, $F \cap G$ et $F + G$.

Exercice 5. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{C}^3$. On note f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même telle que $f(e_1) = (2, 0, -1), f(e_2) = (1, 2, i), f(e_3) = (2, \pi, -2)$. Déterminer les images par f de $u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (2, -1, 0)$ et $u_3 = (-3, 0, 2)$. Déterminer la matrice de f par rapport à la base canonique de $\mathbb{C}^3$.

Exercice 6. On rappelle que l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans lui-même est un espace vectoriel pour les opérations usuelles. On considère les quatre fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par les formules

$$\begin{array}{ll} f_1(x) = \mathrm{e}^x \cos x & f_2(x) = \mathrm{e}^x \sin x \\ f_3(x) = \mathrm{e}^{-x} \cos x & f_3(x) = \mathrm{e}^{-x} \sin x \end{array}$$

a) Montrer qu'elles sont linéairement indépendantes. On note E l'espace vectoriel des combinaisons linéaires de ces quatre fonctions.
b) Montrer que pour chaque $f \in E$ alors $f' \in E$. On note d l'application de E dans lui-même qui à chaque f associe f'. Vérifier que d est une application linéaire. Déterminer la matrice de d dans la base (f_1, f_2, f_3, f_4) de E.

Exercice 7. Soient F, G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. On définit l'application $f : F \times G \to E$ par $f(x, y) = x + y$.

a) Montrer que f est linéaire.

b) Déterminer le noyau et l'image de f.

c) Montrer que l'on a équivalence entre :

(i) f est un isomorphisme,

(ii) $E = F \oplus G$,

(iii) $E = F + G$ et $F \cap G = \{0\}$.

d) On suppose que E est de dimension finie. Appliquer le théorème du rang à f.

Exercice 8. On suppose que σ est une application continue de $[0, 1]$ dans lui-même telle que $\sigma \circ \sigma = I_{[0,1]}$. Donner un exemple d'une telle application σ différente de $I_{[0,1]}$. On note

$$F = \{ f \in C([0, 1], \mathbb{R})\, ;\, f \circ \sigma = f \}$$

$$G = \{ f \in C([0, 1], \mathbb{R})\, ;\, f \circ \sigma = -f \}$$

Montrer que $C([0, 1], \mathbb{R}) = F \oplus G$.

Exercice 9. Soit $E = \mathbb{R}^3$, $F = \mathrm{Vect}\{(x, y, z) \text{ tq } x + 2y + z = 0\}$ et $G = \mathrm{Vect}\{(1, 1, 1)\}$.

a) Vérifier que $F \oplus G = E$.

b) Soit s la symétrie de noyau F et de direction G et soit $X = \mathrm{Vect}\{(a, b, c)\}$. Déterminer $s(X)$.

Exercice 10. Soient p, q deux projecteurs. Montrer les équivalences :

$$p + q \text{ est une projecteur } \iff p \circ q + q \circ p = 0 \iff \begin{cases} Im(p) \subset Ker(q) \\ Im(q) \subset Ker(p). \end{cases}$$

Chercher alors le noyau et l'image de $p + q$.

Exercice 11. On désigne par $\mathcal{I}$ le sous-espace de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions impaires, et par $\mathcal{P}$ celui des fonctions paires. Montrer que $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathcal{I} \oplus \mathcal{P}$. Si $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, donner la décomposition explicite $f = f_i + f_p$ avec $f_i \in \mathcal{I}$ et $f_p \in \mathcal{P}$.

2. Dualité I

Exercice 12. Soit E un espace vectoriel non réduit à $\{0\}$. Montrer qu'une forme linéaire non nulle définie sur E est surjective.

Exercice 13. a) Montrez que les trois vecteurs suivant forment une base de $\mathbb{R}^3$.

$$(1,0,2);(0,1,1);(1,1,1).$$

b) Trouvez la base duale.

Exercice 14. Soient f_1 et f_2 les deux applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définies pour chaque $X=(x,y)$ par $f_1(X)=2x+3y$ et $f_2(X)=x+2y$.

a) Montrer que (f_1,f_2) est une base de $[\mathbb{R}^2]^*$.

b) Exprimer f_1 et f_2 à l'aide de la base duale de la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

c) Quelles sont dans la base (f_1,f_2) les composantes des formes linéaires suivantes : $f(X)=x, g(X)=2x-3y$ et $h(X)=\dfrac{1}{2}(x+y)$.

d) Déterminer la base de $\mathbb{R}^2$ dont (f_1,f_2) est la base duale.

Exercice 15. On note c l'espace vectoriel réel des suites convergentes de réels et c_0 le sous-espace des suites qui convergent vers 0.

a) On note Φ l'application de c dans $\mathbb{R}$ qui à chaque suite $x=(x_n)_{n\geq 1}$ associe $\Phi(x)=\lim_n x_n$. Montrer que Φ est une forme linéaire sur c. Quel est son noyau?

b) Etant donnée une suite $x=(x_n)_{n\geq 1}\in c$ on lui associe la suite $y=(y_k)_{k\geq 1}$ définie par $y_1=\Phi(x)$ et pour $k=1,2,\ldots$ $y_{k+1}=x_k-\Phi(x)$. Montrer que $y\in c_0$. Montrer que l'application ainsi définie $u:c\to c_0$ est un isomorphisme.

c) On désigne par c_{st} le sous-espace de c des suites constantes. Montrer que $c=c_0\oplus c_{st}$.

Exercice 16. Dans $\mathbb{R}^3$ on considère les formes linéaires : $f_1(x,y,z)=x+2y+3z$, $f_2(x,y,z)=2x+3y+4z$, $f_3(x,y,z)=3x+4y+6z$.

a) Montrer que (f_1,f_2,f_3) est une base de $(\mathbb{R}^3)^*$.

b) Trouver la base antéduale.

Exercice 17. Soit $E=\mathbb{R}_3[X]$. On considère les formes linéaires : $f_i : P : [0;1] \to \int_{-1}^{1} t^i P(t)dt$ pour $i=0\ldots3$.

a) Montrer que (f_0,f_1,f_2,f_3) est une base de E^*.

b) Trouver la base antéduale.

Exercice 18. On note $\mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes à coefficients réels de degré ≤ 3. On rappelle que $\mathcal{U} = \{1, X, X^2, X^3\}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$. On considère les quatre formes linéaires f_1, f_2, f_3 et f_4 définies sur $\mathbb{R}_3[X]$ par

$$f_1(p) = p(0) \qquad f_2(p) = p(1) \qquad f_3(p) = p'(0) + 2p'(1) \qquad f_4(p) = p'(1).$$

1 - Déterminer les composantes de chacune des formes linéaires f_1, f_2, f_3 et f_4 dans la base duale de la base $\mathcal{U}$.

2 - Montrer que (f_1, f_2, f_3, f_4) est une base de $[\mathbb{R}_3[X]]^*$.

3 - Déterminer la base de $\mathbb{R}_3[X]$ dont (f_1, f_2, f_3, f_4) est la base duale.

4 - Montrer que l'application linéaire $\Phi : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^4$ définie, pour chaque p par,

$$\Phi(p) = (f_1(p), f_2(p), f_3(p), f_4(p))$$

est un isomorphisme.

5 - On note f la forme linéaire sur $\mathbb{R}_3[X]$ définie, pour chaque p par, $f(p) = \displaystyle\int_0^1 p(t)dt$. Déterminer les composantes de f dans la base (f_1, f_2, f_3, f_4).

Exercice 19. On note S l'ensemble des suites de réels muni des opérations usuelles d'addition et de multiplication par un réel. A chaque $\theta \in [\mathbb{R}[X]]^*$ on associe la suite $\sigma(\theta) = (\theta(X^n))_{n\geq 0}$. Montrer que σ est un isomorphisme de $[\mathbb{R}[X]]^*$ sur S.

Exercice 20. Soit un espace vectoriel E et $\phi, \psi \in E^*$ deux formes linéaires non nulles. On suppose que $\mathrm{Ker}\phi \subset \mathrm{Ker}\psi$.

1 - Montrer que $\mathrm{Ker}\phi = \mathrm{Ker}\psi$.

2 - Soit $a \in E$ tel que $\phi(a) = 1$. Montrer que $\psi = \psi(a)\phi$. [On pourra écrire un élément de E comme la somme d'un élément de $\mathrm{Ker}\phi$ et d'un multiple de a.]

3 - Application - Soit H un hyperplan de E. Montrer que $\{\phi \in E^* : \phi(x) = 0 \quad \forall x \in H\}$ est une droite de E^*.

Exercice 21. Soit E l'ensemble des suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes réels telles que pour tout n : $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

a) Montrer que E est un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie.

b) Soient f_0 l'application de E dans $\mathbb{R}$ telle que $f_0(u) = u_0$ et f_1 l'application de E dans $\mathbb{R}$ telle que $f_1(u) = u_1$. Trouver la base duale de (f_0, f_1).

Exercice 22. On considère la matrice $A = (a_{i,j})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit $tr(A)$ comme la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

a) Montrer que tr est une forme linéaire.

b) Montrez que pour toutes matrices A, B on a $tr(AB) = tr(BA)$.

3. Réduction des endomorphismes

Exercice 23. On considère les deux matrices suivantes dans la base canonique,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On considère les trois polynômes

$$P(X) = X^2 + X - 2, Q(X) = X^3 - 2X, R(X) = -X^3 + (i+2)X^2 - (1+2i)X + i.$$

Calculer

$$P(A), Q(A), R(A), P(B), Q(B), R(B),$$

$$(P+Q)(B), P(B) + Q(B), P(A+B), P(A) + P(B),$$

$$P(AB), P(BA), P(A)P(B), (PQ)(A), (QP)(A), P(A)Q(A), Q(A)P(A).$$

Exercice 24. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que:

a) si V est un sous-espace stable par f, alors V est un sous-espace stable par $P(f)$,

b) $\mathrm{Ker}P(f)$ et $\mathrm{Im}P(f)$ sont stables par f.

Exercice 25. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Calculer son polynôme caractéristique $\xi(X)$ puis $\xi(A)$.

b) En déduire que A est inversible, calculer son inverse.

Exercice 26. Soit ϕ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ donné par

$$\phi(P) = XP'(X) + P(X).$$

a) Calculer $Q(\phi)$ ou Q est le polynôme $Q(X) = X^2 - 1$.

b) Calculer le noyau et l'image de ϕ.

Exercice 27. Soit u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel E qui commutent ($u \circ v = v \circ u$). Montrer que tout sous-espace propre de u est stable par v.

Exercice 28. On considère les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ces matrices sont-elles diagonalisables ? Si oui, les réduire.

Exercice 29. Soit A_t la matrice $A_t = \begin{pmatrix} t & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & t & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & t \end{pmatrix}$. Sans calculer le polynôme caractéristique de A_t, montrer que $(t-1)$ est valeur propre. Déterminer l'espace propre associé. Que dire de la multiplicité de la valeur propre $(t-1)$? En déduire le spectre de A_t. A_t est-elle diagonalisable ?

Exercice 30. Pour quelles valeurs des paramètres $a, b, c \in \mathbb{C}$ la matrice

$$M = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & b & 2 \\ 0 & 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

est-elle diagonalisable ?

Exercice 31. Soit $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$.

1 - Calculer M^2. En déduire un polynôme annulateur de M. M est-elle diagonalisable?

2 - Diagonaliser M.

Exercice 32. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que:

- $a_{ij} > 0$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$
- $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

1 - Montrer que 1 est valeur propre de A.

2 - Montrer que si λ est valeur propre de A, alors $|\lambda| < 1$.

Exercice 33. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{bmatrix} 2i+2 & 2i+4 & -i-2 \\ 0 & i & 0 \\ 2i+4 & 4i+8 & -i-4 \end{bmatrix}.$$

1 - Déterminer le polynôme caractéristique, les valeurs propres et les vecteurs propres de f.

2 - Montrer qu'il existe deux endomorphismes g, h de $\mathbb{C}^3$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n = i^n g + (-2)^n h$. Quelles sont les matrices de g et h dans la base canonique?

Exercice 34. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et $M = \begin{bmatrix} A & 4A \\ A & A \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$. On veut déterminer le polynôme caractéristique de M en fonction de celui de A.

1 - Soit $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Diagonaliser B.

2 - Montrer que M est semblable à la matrice $N = \begin{bmatrix} -A & 0 \\ 0 & 3A \end{bmatrix}$.

3 - Calculer P_M en fonction de P_A.

Exercice 35. On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $u(P) = X^n P(1/X)$.

a)Déterminer $u \circ u$, en déduire que u est diagonalisable.

b) Déterminer une base de vecteurs propres de u.

Exercice 36. Soit $M \in M_3(\mathbb{R})$, telle que $M \neq Id$ et $M^3 = Id$.

a) Quelles sont les valeurs propres complexes de M ?

b) Montrer que M est semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Exercice 37. Déterminer toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ qui vérifient $M^2 - 3M + 2I_2 = 0$.

Exercice 38. Soient $A \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que $\mathrm{tr}(A) \neq 0$ et

$$f : \mathcal{M}_n(K) \to \mathcal{M}_n(K), M \mapsto \mathrm{tr}(A)M - \mathrm{tr}(M)A.$$

(1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(K)$.

(2) Montrer que $\mathcal{T} = \{M \in \mathcal{M}_n(K) : \mathrm{tr}(M) = 0\}$ et $\mathrm{Vect}(A)$ sont des sous-espaces propres de f.

(3) En déduire que f est diagonalisable et écrire la matrice réduite de f.

Exercice 39. Soit f endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $Spec(f) = \{\lambda\}$ et $dimKer(f - \lambda Id) = 2$. Montrer qu'il existe une base de l'espace dans laquelle

$$Mat(f) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Exercice 40. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

a) Montrer que A n'est pas diagonalisable.

b)Cherchez deux vecteurs propres de A linéairement indépendants.

c) Complétez les en une base de $\mathbb{R}^3$.

d) Résoudre le système $X' = AX$.

Exercice 41. Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $f^k = 0$.

1 - Déterminer le spectre de f. En déduire que si $f \neq 0$, alors f n'est pas diagonalisable.

2 - On suppose $f \neq 0$. Soit $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 1$, tel que $f^r = 0$ et $f^{r-1} \neq 0$.

a) Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $f^{r-1}(x) \neq 0$.

b) Montrer que la famille $(x, f(x), \ldots, f^{r-1}(x))$ est libre.

c) Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par $(x, f(x), \ldots, f^{r-1}(x))$. Montrer que F est stable par f.

d) Soit u l'endomorphisme induit par f sur F. Donner la matrice de u dans la base $(x, f(x), \ldots, f^{r-1}(x))$.

Exercice 42. On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

En effectuant le moins de calculs possible,

(1) montrer que
$$\{0\} \subset \mathrm{Ker}A \subset \mathrm{Ker}A^2 \subset \mathrm{Ker}A^3 = \mathbb{R}^4$$
et déterminer les dimensions respectives de $\mathrm{Ker}A$ et $\mathrm{Ker}A^2$,

(2) déterminer un vecteur e_1 tel que $\mathbb{R}^4 = \mathrm{Ker}A^2 \oplus \mathrm{Vect}(e_1)$,

(3) montrer que (e_1, Ae_1, A^2e_1) est une famille libre,

(4) montrer que $Ae_1 \in \mathrm{Ker}A^2$, et que $\mathrm{Ker}A^2 = \mathrm{Ker}A \oplus \mathrm{Vect}(Ae_1)$,

(5) montrer que $A^2e_1 \in \mathrm{Ker}A$ et déterminer un vecteur e_2 tel que $\mathrm{Ker}A = \mathrm{Vect}(A^2e_1) \oplus \mathrm{Vect}(e_2)$,

(6) montrer que (e_1, Ae_1, A^2e_1, e_2) est une base de $\mathbb{R}^4$.

(7) Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base (A^2e_1, Ae_1, e_1, e_2). Caluler $P^{-1}AP$.

Adapter ce travail à l'étude de B et C

4. Dualité II

Exercice 43. Soient A, B deux sous-ensembles non vides d'un espace vectoriel E de dimension finie. Démontrer que:

a) $A \subset B$ implique $B^\perp \subset A^\perp$,

b) $A^\perp = (\mathrm{Vect}A)^\perp$,

c) $A \subset (A^\perp)^\perp$,

d) si A est un sous-espace vectoriel de E, alors $A = (A^\perp)^\perp$,

e) $(A \cup B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$,

f) $A^\perp + B^\perp = (A \cap B)^\perp$.

Exercice 44. Soient E, F deux espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$ et $u : E \to F$ une application linéaire.

Montrer que si V est un sous-espace vectoriel de E on a $[u(V)]^\perp = ({}^t u)^{-1}(V^\perp)$.

Exercice 45. On note F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs

$$\begin{array}{ll} u_1 = (1,1,1,1) & u_2 = (-1,1,-2,2) \\ u_3 = (-1,5,-4,8) & u_4 = (-3,1,-5,3) \end{array}$$

1 - Déterminer la dimension de F et celle de $F^\perp$.

2 - Démontrer que, pour chaque $f \in F^\perp$, il existe deux réels a, b tels que, pour chaque $v = (x, y, z, t)$, on a $f(v) = 4ax + 4by - (3a + b)z - (a + 3b)t$. Déterminer une base de $F^\perp$.

3 - Déterminer les composantes des formes constituant cette base dans la base duale de la base canonique.

Exercice 46. Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie et F, G deux sev de E tels que $F \oplus G = E$.

a) Montrer que $F^\perp \oplus G^\perp = E^*$.

b) Montrer que $F^\perp$ est naturellement isomorphe à G^* et $G^\perp$ à F^*.

Exercice 47. Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On considère la base canonique $(e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22},)$ de E:

$$e_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) On désigne par $(e_{11}^*, e_{12}^*, e_{21}^*, e_{22}^*)$ la base duale de $(e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22})$. Soit $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in E$, calculer $e_{11}^*(M)$, $e_{12}^*(M)$, $e_{21}^*(M)$ et $e_{22}^*(M)$.

b) Pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, on définit $\phi_i : E \to \mathbb{R}$ par:

$$\phi_1(M) = a + d, \quad \phi_2(M) = b, \quad \phi_3(M) = b - d, \quad \phi_4(M) = a + b + c + d.$$

Montrer que $(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)$ est une base de E^*.

c) Déterminer (M_1, M_2, M_3, M_4) la base antéduale de $(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)$.

d) Soit $A \in E$. Si $M \in E$, on pose $\phi_A(M) = \phi_1(AM)$. Pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, déterminer $A_i \in E$ telle que $\phi_i = \phi_{A_i}$.

e) Montrer que

$$\begin{array}{rccc} u: & E & \to & E^* \\ & A & \mapsto & \phi_A \end{array}$$

est un isomorphisme.

Exercice 48. Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que:

a) $\mathrm{Im}\,{}^t u = (\mathrm{Ker} u)^\perp$,

b) $\mathrm{Ker}\,{}^t u = (\mathrm{Im} u)^\perp$.

5. Espaces préhilbertiens – Espaces euclidiens et hermitiens

Exercice 49. On considère l'application ϕ définie dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ par $\phi(A, B) = tr({}^t\overline{A}B)$

a) Montrer que ϕ est un produit scalaire.

b) Quelle est la norme associée ?

c) Ecrire l'inégalité triangulaire.

Exercice 50. L'espace $\mathbb{R}^4$ est muni de sa structure euclidienne canonique. Déterminer, dans la base canonique, la matrice de la projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel d'équations

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + y + z + t & = & 0 \\ x + 2y + 3z + 4t & = & 0 \end{array} \right.$$

Exercice 51. La matrice $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ est-elle la matrice d'un produit scalaire ?

Exercice 52. Soit $E = C([-1, 1], \mathbb{C})$, l'espace vectoriel des fonctions complexes continues définies sur $[-1, 1]$. Pour chaque $f \in E$, on définit

$$q(f) = \int_{-1}^{1} |f(t)|^2 t^2 e^{-t}\, dt.$$

1 - Montrer que q est une forme quadratique définie positive.

2 - Ecrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité de Minkowski.

Exercice 53. 1 - Soient $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{C}$. Montrer que:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^2 \right),$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

2 - Soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \geq n^2$.

3 - Soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sqrt{n} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Exercice 54. On considère la forme bilinéaire $\langle\ ,\ \rangle$ définie sur $E = \mathbb{R}_2[X]$ par

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt.$$

1 - Montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire.

2 - Construire une base orthonormée de $(\mathbb{R}_2[X], \langle\ ,\ \rangle)$ en appliquant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base $(1, X, X^2)$.

3 - Calculer

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt.$$

Exercice 55. Soit $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne, a un vecteur et α, β, γ trois réels. Résoudre $\alpha(x, x) + \beta(x, a) + \gamma = 0$.

Exercice 56. On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire $\langle p, q \rangle = \displaystyle\int_{-1}^1 p(x)q(x)dx$. Existe-t-il $q \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour chaque $p \in \mathbb{R}[X]$, on a $\langle p, q \rangle = p(0)$?

Exercice 57. Soient E un espace hermitien et u un endomorphisme de E.

1 - Montrer que $u^* \circ u$ ne possède que des valeurs propres ≥ 0.

2 - On note λ la plus petite valeur propre et μ la plus grande valeur propre de $u^* \circ u$. Montrer que, pour chaque $x \in E$, on a $\lambda\|x\|^2 \leq \|u(x)\|^2 \leq \mu\|x\|^2$.

Exercice 58. L'espace $\mathbb{R}^4$ est muni de sa structure euclidienne canonique. On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ représenté dans la base canonique par la matrice

$$A = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -1 & -4 & 4 & -4 \\ -4 & 5 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & 5 & 2 \\ -4 & -2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

1 - Justifier l'existence d'une base orthonormale par rapport à laquelle u est représenté par une matrice diagonale.

2 - Déterminer une base orthonormale par rapport à laquelle u est représenté par une matrice diagonale.

Exercice 59. Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1 - Montrer que si $f = f^*$ et $\forall x \in E : \langle x, f(x) \rangle = 0$ alors $f = 0$.

2 - Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $f \circ f^* = f^* \circ f$.

(ii) $\forall x, y \in E : \langle f(x), f(x) \rangle = \langle f^*(x), f^*(x) \rangle$.

(iii) $\forall x \in E : \|f(x)\| = \|f^*(x)\|$.

3 - Si $\dim(E) = 2$ et si $f \circ f^* = f^* \circ f$ alors la matrice de f dans une base orthonormée est soit symétrique, soit de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $b \neq 0$.

4 - On suppose désormais que $\dim(E) = 3$ et que $f \circ f^* = f^* \circ f$.

a) Montrer que f a au moins une valeur propre réelle qu'on notera λ. Montrer que E_λ et $E_\lambda^\perp$ sont stables par f et f^*.

b) Montrer que si f n'est pas symétrique, il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E et deux réels a et b (avec $b \neq 0$) tels que $\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Exercice 60. Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien et $s \in \mathcal{L}(E)$ telle que $s^2 = id$.

1 - Montrer que $E = \mathrm{Ker}(s - Id) \oplus \mathrm{Ker}(s + Id)$.

2 - Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes:

(i) $s \in \mathcal{O}(E)$.

(ii) $\mathrm{Ker}(s - Id) \perp \mathrm{Ker}(s + Id)$.

(iii) $s = s^*$.

3 - On note désormais s_F l'unique symétrie $s \in \mathcal{O}(E)$ telle que $F = \mathrm{Ker}(s + Id)$. Montrer que pour tout $u \in \mathcal{O}(E)$ on a:

$$u s_F u^{-1} = s_{u(F)}.$$

Exercice 61. Soit E euclidien, $n \in \mathbb{N}^*, (x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n) \in E^{2n}$ tels que:

$$\forall (i,j) \in \{1, ..., n\}^2, (x_i | x_j) = (y_i | y_j)\,.$$

Montrer qu'il existe un endomorphisme orthogonal f de E tel que:

$$\forall i \in \{1, ..., n\}, f(x_i) = y_{i.}$$

6. Formes quadratiques, formes hermitiennes

Exercice 62 (Formule de polarisation)**.** Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, q une forme quadratique sur E et ϕ une forme hermitienne sur E telle que pour tout $x \in E$, $q(x) = \phi(x, x)$. Pour tout $x, y \in E$, développer $q(x + y)$, $q(x - y)$, $q(x + iy)$, $q(x - iy)$. En déduire que la forme hermitienne ϕ est unique, caractérisée par:

$$\phi(x, y) = \frac{1}{4}(q(x + y) - q(x - y) + iq(x - iy) - iq(x + iy))$$

pour tout $x, y \in E$.

Exercice 63. On considère les applications suivantes:

(i) $$\begin{array}{llll} q: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & x^2+2y^2 \end{array}$$
(ii) $$\begin{array}{llll} q: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & xy \end{array}$$
(iii) $$\begin{array}{llll} q: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \mapsto & 3xy+z^2 \end{array}$$
(iv) $$\begin{array}{llll} q: & \mathbb{C}^2 & \to & \mathbb{C} \\ & (x,y) & \mapsto & 3x\bar{y}+3\bar{x}y+|z|^2 \end{array}$$
(v) $$\begin{array}{llll} q: & \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y,z,t) & \mapsto & xy+yz+zt+tx \end{array}$$
(vi) $$\begin{array}{llll} q: & \mathbb{C}^3 & \to & \mathbb{C} \\ & (x,y,z) & \mapsto & x\bar{x}+|y|^2+\bar{z}z+\bar{x}y+x\bar{y}-y\bar{z}-\bar{y}z \end{array}$$
(vii) $$\begin{array}{llll} q: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \mapsto & x^2-2y^2+xy+yz. \end{array}$$

1 - Dans chaque cas, montrer que q est une forme quadratique (pour cela, on explicitera la forme polaire ϕ associée à q).

2 - Donner la matrice M de q dans la base canonique. A partir de M, déterminer le rang de q, déterminer le noyau Ker$q$. Est-ce que Ker$q$ est égal au cône isotrope C_q?

3 - Dans les cas (i) et (ii), on peut faire facilement un dessin: tracer des courbes de niveau $q(x,y)=a$ pour $a\in\mathbb{R}$; pour $a=0$, qu'obtient-on? La terminologie *cône* pour le cône isotrope est-elle "bien choisie"? Faire un dessin dans le cas *(iii)*.

4 - Donner une décomposition en carrés de la forme q (on utilisera l'algorithme de Gauss). En déduire la signature de q. Retrouver le rang de q. Déterminer les cas où ϕ est un produit scalaire.

Exercice 64. Soit $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1 - Montrer que $q(A)=tr(A^2)$ est une forme quadratique.

2 - Déterminer sa signature. (Indication: Pensez aux matrices symétriques et anti-symétriques).

Exercice 65. Soient $E=\mathbb{R}_2[X]$ l'espace des fonctions polynômiales réelles de degré inférieur ou égal à 2 et q l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par $q(P)=P(0)P(1)$.

1 - Montrer que q est une forme quadratique sur E.

2 - Déterminer la matrice de q dans la base canonique de E.

3 - Déterminer $E^{\perp}$. En déduire le rang de q.

4 - Déterminer le cône isotrope C_q de q. Déterminer une base de E formée de vecteurs isotropes. C_q est-il un sous-espace vectoriel de E ?

5 - Déterminer une base q-orthogonale. En déduire la signature de q.

Exercice 66. On considère la forme quadratique:

$$\begin{array}{llll} q: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \mapsto & (x+4y-z)^2+(3x-2y+2z)^2+(7x+3z)^2. \end{array}$$

Donner la signature et le rang de q.

7. Un peu de géométrie euclidienne dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

Exercice 67. On considère les matrices suivantes:

(i) $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(ii) $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

(iii) $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

1 - Dans chaque cas, repérer les propriétés remarquables de la matrice A (est-elle autoadjointe? est-ce une isométrie?).

2 - Lorsque c'est possible, diagonaliser la matrice A dans une base orthonormale.

3 - Dans les cas (ii) et (iii), reconnaître la transformation de $\mathbb{R}^3$ représentée par la matrice A.

Exercice 68. 1 - Compléter la matrice $A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 3 & . \\ -2 & 6 & . \\ 3 & . & . \end{pmatrix}$ en une matrice orthogonale positive.

2 - Reconnaître l'application de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 69. On fixe un repère orthonormé de $\mathbb{R}^2$. Tracer les courbes d'équations:

(i) $13x^2 - 32xy + 37y^2 - 2x + 14y - 5 = 0$

(ii) $xy + 3x + 5y - 4 = 0$

(iii) $(2x + 3y)^2 + 4x + 6y - 5 = 0$

Exercice 70. On fixe un repère orthonormé de $\mathbb{R}^2$. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la courbe d'équation:

$$mx^2 + 4mx + (m-1)y^2 + 2 = 0.$$

On discutera selon la valeur de $m \in \mathbb{R}$.