

Université Paul Cézanne
Faculté des sciences et techniques
Antenne de Montperrin
M24 TD n°1
Révisions

1 Développement et factorisation dans \mathbb{R}

Exercice 1 On désigne par n un entier et $a, b, c, a_1, a_2, \dots, a_n$ des réels. Développez $(a + b)^3$; $(a - b)^3$; $(a + b)^n$; $(a - b)^n$; $(a + b + c)^2$; $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2$.

Exercice 2 On désigne par x et y des réels. Factorisez

$$x^3 - y^3; x^3 + y^3.$$

Exercice 3 Polynômes de \mathbb{R}

1. Rappelez quels sont les polynômes non factorisables de \mathbb{R} . On ne demande pas de démonstration pour cette question.
2. On désigne par a, b, x et y des réels. Factorisez les polynômes de la variable x suivants

$$P_1(x) = a^2x^2 - b^2y^2; P_2(x) = x^3 - 2x + 1; P_3(x) = x^4 - 2x^2y^2 + y^4; P_4(x) = x^6 + 1.$$

2 Equations et inéquations du 2nd degré dans \mathbb{R}

Exercice 4 On désigne par a un réel non nul et par b et c deux réels. On considère l'équation du 2nd degré de la variable réelle x

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

On suppose que son discriminant est strictement positif.

1. Rappelez les formules donnant la somme et le produit des racines en fonction de a, b et c . On ne demande pas de démonstration pour cette question.

2. Résolvez l'inéquation

$$ax^2 + bx + c > 0.$$

Exercice 5 *Rectangle d'or*

On considère un rectangle $ABCD$ de largeur $AB = l$ et de longueur $BC = L$. En retirant à ce rectangle le carré $ABEF$ situé à l'intérieur du rectangle, on obtient un 2ième rectangle $ECDF$. On suppose que $ECDF$ a pour longueur l . Calculez la valeur du rapport $\frac{L}{l}$ pour que

$$\frac{BC}{CD} = \frac{AB}{EC}.$$

Exercice 6 Résolvez les inéquations suivantes en utilisant les équations du 2nd degré mais sans calculer les discriminants.

$$1) (x+1)(3x-1) > 0; \quad 2) \frac{-x+1}{2x-1} \geq 0; \quad 3) \frac{x^2-x+2}{x^2-3} > 1; \quad 4) (2x^2-1)(3x^2-1) < 0.$$

Exercice 7 Donnez l'ensemble de définition des fonctions suivantes

$$f(x) = \ln[(6x+1)(3x-1)]; \quad g(x) = \ln\left(\frac{-3x+1}{2x+1}\right).$$

Exercice 8 Résolvez les équations de la variable réelle x suivantes

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0; \quad e^{4x} - 7e^{2x} + 12 = 0; \quad \sqrt{x^2 + x} = 2x - \frac{1}{8}; \quad \sqrt{\frac{x+2}{x-3}} = 3.$$

3 Suites usuelles

Exercice 9 On considère une suite géométrique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de premier terme u_1 et de raison $q \neq 1$.

1. Rappelez et démontrez par récurrence la formule qui donne la somme des n premiers termes de cette suite.
2. Déduisez que pour tout entier naturel non nul n et pour tous les réels a et b

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1}).$$

3. Que devient l'égalité précédente lorsqu'on remplace b par $-b$?

Exercice 10 Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les suites définies par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = 5v_n \end{cases}$$

1. Donnez l'expression de u_n en fonction de n .
2. Donnez l'expression de v_n en fonction de n .
3. On appelle S_n (respectivement Σ_n) la somme des $n+1$ premiers termes de u_n (respectivement v_n). Calculez S_n et Σ_n en fonction de n .

4 Fonctions et inégalités

Exercice 11 Soient f et g les fonctions définies par

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \quad g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

1. Etudiez ces fonctions (c'est-à-dire ensemble de définition, parité, tableau des variations, limites et courbe).
2. Ces fonctions s'appellent respectivement cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique. On les note ch et sh . A quelles formules connues ces fonctions font-elles penser ?
3. Les fonctions \cos et \sin permettent de construire la trigonométrie circulaire. A l'aide des fonctions ch et sh , on construit la trigonométrie hyperbolique. On retiendra par coeur le formulaire de trigonométrie circulaire qui vous a été distribué en même temps que le TD. Il existe un moyen mnémotechnique qui permet de passer du formulaire de trigonométrie circulaire à celui de trigonométrie hyperbolique. Il suffit de remplacer \cos par ch et \sin par sh . Donnez les formules correspondantes à

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1; \quad \sin(2x) = 2 \cos(x) \sin(x).$$

Exercice 12 Inégalités

1. Démontrez que pour réel $x \geq 0$

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x.$$

2. Démontrez que pour tout réel $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$\sin(x) \geq \frac{2}{\pi}x.$$

On donnera une interprétation géométrique du résultat.

3. Démontrez que pour tout réel $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$

$$3x < 2 \sin(x) + \tan(x).$$