Université Paul Cézanne
Faculté des sciences et techniques
Antenne de Montperrin
M24 TD n°2
Dérivation et intégration

1 Dérivation

1.1 Définition du nombre dérivée et tangente

Exercice 1 *Soit n un entier, $n \geq 1$. Démontrez que la fonction f définie par $f(x) = x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminez sa dérivée.*

Exercice 2 *Démontrez que la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x}$ est dérivable (on précisera sur quel ensemble) et déterminez sa dérivée.*

Exercice 3 *Déterminez le point de la parabole d'équation $y = x^2 - 7x + 3$ où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y + 5x - 3 = 0$.*

1.2 Calcul de dérivée

Exercice 4 *Pour les fonctions qui suivent, on donnera les ensembles sur lesquels ces fonctions sont dérivables (en justifiant la dérivabilité) puis on calculera la dérivée. On désigne par a,b, c et d quatre réels non nuls donnés.*

1. $f_1(x) = \frac{a\cos(x)+b}{2\cos(x)+1}$; $f_2(x) = \frac{a\tan(x)+b}{2\tan(x)+1}$; $f_3(x) = \frac{\ln(x)+1}{\ln(x)-1}$; $f_4(x) = \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$.
2. $g_1(x) = \ln\left(\frac{1}{2} - \cos(x)\right)$; $g_2(x) = \ln\left(\sqrt{x}\right) + \tan\left(\sqrt{x}\right)$.
3. $h_1(x) = \sin\left(x^3\right) + \sin^3(x)$; $h_2(x) = \tan\left(x^3\right) + \tan^3(x)$; $h_3(x) = \tan(x) - \frac{1}{3}\tan^3(x) + \frac{1}{5}\tan^5(x)$.

1.3 Application de la dérivée et calcul d'erreur

Exercice 5 *Une tige non homogène a une longueur de* $12cm$. *La masse de cette tige est proportionnelle au carré de la distance* AM *et vaut* $10g$ *quand* $AM = 2cm$. *On posera* $AM = x$ *et on appelera* $m(x)$ *la masse de la tige* AM.

1. *Déterminez la masse de la tige* AB.
2. *Déterminez la densité linéaire en un point* M *(c'est-à-dire* $\frac{dm(x)}{dx}$*).*

Exercice 6 *On utilise un pendule de longueur* L *pour évaluer l'accélération de la pesanteur* g *en un point de la Terre.On rappelle que la période* T *de la Terre est liée à* g *par la formule*

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}.$$

On suppose que l'erreur relative sur T *est* $0,001$. *Quelle est l'erreur relative que l'on commet sur* g *?*

2 Intégration

2.1 Primitives usuelles immédiates

Exercice 7 *Pour les intégrales définies suivantes, on demande de justifier l'existence de l'intégrale puis de la calculer.*

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} [\cos(5x) + \sin(2x)] \ dx; \quad I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left[1 + \tan^2(x)\right] \ dx; \\ I_3 &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2(x)} \ dx; \quad I_4 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left[1 + \tan^2(x) + \cos(3x)\right] \ dx. \end{aligned}$$

Exercice 8 *Pour les intégrales indéfinies suivantes, on précisera les intervalles sur lesquels elles sont définies puis on les calculera.*

$$f_1(x) = \int \frac{1}{x\sqrt{x}} \ dx; \quad f_2(x) = \int \left(x^2\sqrt{x} + e^{2x}\right) \ dx.$$

2.2 Intégration par parties

Exercice 9 *Pour l' intégrale définie suivante, on demande de justifier son existence puis de la calculer.*

$$I_1 = \int_1^2 t\sqrt{t+2} \, dt.$$

Exercice 10 *Pour les intégrales indéfinies suivantes, on précisera les intervalles sur lesquels elles sont définies puis on les calculera.*

$$f_1(u) = \int_1^u t^2 \ln(t) \ dt; \quad f_2(x) = \int \frac{\ln(x)}{x^2} \ dx.$$

2.3 Formule du type $u'(x) F[u(x)]$

Exercice 11 *Pour les intégrales définies suivantes, on demande de justifier l'existence de l'intégrale puis de la calculer.*

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^3(t) \ dt; \quad I_2 = \int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}} \ dx;$$

$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^4(x) \sin(x) \ dx; \quad I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \exp[2\tan(x)] \frac{1}{\cos^2(x)} \ dx.$$

Exercice 12 *Pour l'intégrale indéfinie suivante, on précisera les intervalles sur lesquels elle est définie puis on la calculera.*

$$f_1(x) = \int \tan(x)\ dx.$$

2.4 Changement de variables

Exercice 13 *En effectuant le changement de variable $x = sh(t)$, calculez l'intégrale définie*

$$I = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\, dx.$$

On notera a le réel tel que $sh(a) = 1$.

Exercice 14 *On considère l'intégrale définie*

$$I = \int \frac{1+\ln(x)}{x\ln(x)}.$$

1. *En effectuant le changement de variable $u = x\ln(x)$, calculez I.*
2. *Retrouvez le résultat précédent en décomposant I en une somme de deux intégrales.*