

MA302 – EXAMEN

JANVIER 2009

*durée de l'épreuve: 3h***Aucun document n'est autorisé.****L'usage de la calculatrice est interdit.****Exercice I**

On considère la matrice:

$$A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 3 & b \\ 3 & a & c \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & d \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

1. Déterminer a, b, c et d pour que $A \in SO_3(\mathbb{R})$ (i.e. pour que A soit une matrice orthogonale directe).
2. Décrire géométriquement l'application:

$$\begin{array}{lcl} f : \mathbb{R}^3 & \mapsto & \mathbb{R}^3 \\ X & \rightarrow & AX. \end{array}$$

Exercice II

On considère la matrice:

$$M = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que M est diagonalisable sur \mathbb{R} .
2. Calculer M^2 .
3. En déduire un polynôme de degré 2 annihilant M .
4. Déterminer une base de $\text{Ker} A$.
5. Montrer que les vecteurs:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sont des vecteurs propres de M .

6. Appliquer le procédé d'orthonormalisation de Schmidt à la famille (u_1, u_2, u_3) .
7. Déterminer une matrice orthogonale $P \in O_4(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in M_4(\mathbb{R})$ telles que $M = PDP^{-1}$.
8. Calculer P^{-1} .

Exercice III

On considère le sous espace vectoriel E des matrices symétriques de $M_2(\mathbb{R})$:

$$E = \{M \in M_2(\mathbb{R}), {}^t M = M\}.$$

Soit $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ les formes linéaires sur E définies par:

$$\varphi_1(M) = a + b, \quad \varphi_2(M) = 2b, \quad \varphi_3(M) = c \quad \text{pour } M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que les matrices suivantes forment une base de E :

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Montrer que $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est une base de E^* .
3. Soit (e_1, e_2, e_3) la base antéduale de $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$. Déterminer (e_1, e_2, e_3) .
4. Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$. On pose $\varphi(M) = \text{tr}(AM)$ pour tout $M \in E$ (où $\text{tr}(AM)$ désigne la trace de la matrice AM).
 - a) Montrer que $\varphi \in E^*$.
 - b) Montrer que pour toute matrice $M \in E$ on a

$$\varphi(M) = \varphi(e_1)\varphi_1(M) + \varphi(e_2)\varphi_2(M) + \varphi(e_3)\varphi_3(M).$$

- c) On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminer $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tels que pour toute matrice $M \in E$ on ait

$$\varphi(M) = \alpha_1\varphi_1(M) + \alpha_2\varphi_2(M) + \alpha_3\varphi_3(M).$$

* *

*