

MA302 – EXAMEN

JUIN 2009

durée de l'épreuve: 3h

Aucun document n'est autorisé.
L'usage de la calculatrice est interdit.

Exercice I

On considère l'ensemble \mathcal{A} des matrices inversibles M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifient:

$$M^{-1} = -\frac{1}{4}(M^2 - M - 4I_n).$$

1. Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 3 tel que toute matrice $M \in \mathcal{A}$ vérifie $P(M) = 0$.
2. Montrer que $\mathcal{A} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : P(M) = 0\}$.
3. Montrer que si $M \in \mathcal{A}$, alors $\text{Sp}(M) \subset \{1, 2, -2\}$ (où $\text{Sp}(M)$ désigne le spectre de M).
4. Montrer que toute matrice $M \in \mathcal{A}$ est diagonalisable.

Exercice II

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace hermitien. On considère les deux sous-espaces vectoriels $\mathcal{S}(E)$ et $\mathcal{A}(E)$ définis par:

$$\mathcal{S}(E) = \{f \in \mathcal{L}(E), f^* = f\},$$

$$\mathcal{A}(E) = \{f \in \mathcal{L}(E), f^* = -f\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{S}(E) \cap \mathcal{A}(E) = \{0\}$.
2. Soit $s \in \mathcal{S}(E), a \in \mathcal{A}(E)$. On considère $f = s + a$.
 - (a) Calculer l'adjoint de f en fonction de s et de a .
 - (b) En déduire s, a en fonction de f et de f^* .
3. Montrer que $\mathcal{L}(E) = \mathcal{S}(E) \oplus \mathcal{A}(E)$.
4. Soit Φ la symétrie par rapport à $\mathcal{S}(E)$ parallèlement à $\mathcal{A}(E)$. Calculer $\Phi(f)$ en fonction de f et f^* .

Exercice III

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace des polynômes réels de degré au plus 2. On considère l'application:

$$\begin{aligned} \langle , \rangle : E^2 &\mapsto \mathbb{R} \\ (P, Q) &\rightarrow \langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)tdt. \end{aligned}$$

1. Montrer que \langle , \rangle est un produit scalaire sur E .
2. Soit $P_1 = X^2$, $P_2 = X^2 - \frac{2}{3}$ et $P_3 = X^2 + X$. Montrer que (P_1, P_2, P_3) forme une base de E .
3. Appliquer le procédé d'orthonormalisation de Schmidt à la base (P_1, P_2, P_3) pour obtenir une base orthonormée (e_1, e_2, e_3) de E .
4. Soit φ_i ($i \in \{1, 2, 3\}$) la forme linéaire sur E définie par:

$$\varphi_i(P) = \langle e_i, P \rangle.$$

Montrer que $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est une base de E^* .

5. Déterminer la base antéduale de $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$.

* *
*