

1 Groupes de permutations

Exercice 1. Soit ABC un triangle équilatéral du plan.

1. Déterminer l'ensemble des rotations qui laissent invariant $\{A, B, C\}$.
2. Montrer que c'est un groupe pour la loi \circ .
3. Faire de même avec un carré.

Exercice 2 (Permutations d'un ensemble de n éléments). 1. Une permutation de l'ensemble de n éléments $\{1, 2, \dots, n\}$ est une bijection de cet ensemble dans lui-même. Il est commode de désigner une telle permutation s par le tableau de valeurs suivant : $s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ s(1) & s(2) & \cdots & s(n) \end{pmatrix}$. On note \mathfrak{S}_n l'ensemble de ces permutations pour n donné.

2. Ecrire les éléments de \mathfrak{S}_2 et de \mathfrak{S}_3 .
3. Etablir les tables de composition de ces deux ensembles.
4. De la table de \mathfrak{S}_3 on peut extraire des parties stables ne faisant intervenir que certains éléments ; lesquelles ? Peut-on les trouver toutes ?
5. On peut obtenir tous les éléments de \mathfrak{S}_3 à partir de la composition de certains d'entre-eux ; lesquels ?
6. Combien d'éléments possède \mathfrak{S}_n ?

Exercice 3. Montrer que si X contient au moins trois éléments alors $\sigma(X)$ n'est pas abélien.

Exercice 4. Le but de l'exercice est de montrer que, pour $n \geq 3$, le centre du groupe \mathcal{S}_n ($Z(\mathcal{S}_n)$) est réduit à l'identité.

1. Soit $i \in \{1 \dots n\}$, donner un exemple de permutation s telle que :

$$\begin{cases} s(i) = i \\ \text{et} \\ \forall j \in \{1 \dots n\}, j \neq i \implies s(j) \neq j. \end{cases}$$

2. Soit $\sigma \in Z(\mathcal{S}_n)$, en utilisant le fait que $s \circ \sigma = \sigma \circ s$, montrer que $\sigma(i) = i$. Conclure que le centre de \mathcal{S}_n est réduit à l'identité.
3. Dédurre du résultat précédent que \mathcal{S}_n n'a pas de sous-groupe distingué d'ordre 2.

Exercice 5. On dit qu'un groupe G agit sur un ensemble X de façon p transitive si, étant donnés x_1, \dots, x_p éléments de X distincts et y_1, \dots, y_p éléments de X distincts, il existe g élément de G tel que, pour tout i compris entre 1 et p , $g.x_i = y_i$.

1. Montrer que \mathcal{S}_n agit n transitivement sur $\{1, \dots, n\}$.
2. Montrer que \mathcal{A}_n agit $n - 2$ transitivement sur $\{1, \dots, n\}$.
3. En déduire que, pour n supérieur ou égal à 5, les 3-cycles sont conjugués dans \mathcal{A}_n .

Exercice 6 (Etude du groupe \mathcal{A}_4). 1. Faire la liste des éléments de \mathcal{A}_4 , donner leurs ordres.

2. Soit H l'ensemble formé de l'identité,

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{array} \right).$$

Montrer que H est un sous-groupe distingué de \mathcal{A}_4 isomorphe au groupe de Klein.

Exercice 7. 1. Soit n un entier supérieur ou égal à 2, montrer que le seul morphisme de groupes non trivial de \mathcal{S}_n dans (\mathbb{C}^*, \times) est la signature.

[[Montrer que, si l'image d'une transposition par un morphisme est 1 alors le morphisme est constant égal à 1. Utiliser le fait que les transpositions sont conjuguées dans \mathcal{S}_n .]]

2 Action d'un groupe sur un ensemble

Exercice 8 (Formule des classes). Soit G un groupe fini agissant sur E .

1. Soit x un élément de E . Montrer que l'ensemble $\{g \in G \mid g.x = x\}$ est un sous-groupe de G ; calculer son cardinal en fonction de x .
2. En déduire une partition de E puis une formule pour le cardinal de G en fonction de x . Cette formule s'appelle formule des classes.

Exercice 9. On utilisera les formules précédentes dans ce qui suit :

- Un groupe de 35 éléments opère sur un ensemble à 19 éléments sans en laisser un fixe. Calculer le nombre d'orbites.

- Un groupe de 143 éléments opère sur un ensemble à 108 éléments. Montrer qu'il existe un point fixe.

Exercice 10 (Théorème de Cauchy). *Le but de l'exercice est de montrer, qu'étant donné G un groupe fini de cardinal n et p un diviseur premier de n , il existe un élément de G d'ordre p .*

1. Soit \mathcal{A} le sous-ensemble de G^p défini par :

$$\mathcal{A} = \{(x_1, \dots, x_p) \in G^p, \text{ tels que } x_1 \dots x_p = e\}.$$

Montrer que \mathcal{A} est en bijection avec G^{p-1} . En déduire que : $\text{card}(\mathcal{A}) = n^{p-1}$.

2. On définit l'application ϕ par :

$$\phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathcal{A} & \rightarrow & \mathcal{A} \\ (\bar{k}, (x_1, \dots, x_p)) & \mapsto & (x_{(1+k)\text{mod}[p]}, \dots, x_{(p+k)\text{mod}[p]}) \end{array}$$

Montrer que ϕ est bien définie et que c'est une action du groupe $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur l'ensemble \mathcal{A} .

3. Soit $(x_1, \dots, x_p) \in \mathcal{A}$, montrer que le stabilisateur de (x_1, \dots, x_p) est égal à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ si et seulement si : $x_1 = \dots = x_p$ et x_1 est d'ordre 1 ou p .
4. Appliquer la formule des classes et montrer que le nombre d'éléments d'ordre p de G est congru à -1 modulo p . En déduire qu'il y a, au moins, un élément d'ordre p .
5. Application

Soit G un groupe fini d'ordre n et p un diviseur premier de n tel que : $\forall x \in G, x^p = e$. Montrer qu'il existe un nombre entier k tel que $\text{card}(G) = p^k$.

[[Supposer que n a un diviseur premier q différent de p et appliquer le théorème de Bezout à p et q .]]

Exercice 11. Soit G un groupe fini et H un sous-groupe de G .

1. On note $N(H)$ le normalisateur de H , montrer que l'indice du normalisateur de H est égal au nombre de sous-groupes de G qui sont conjugués à H .
[[Faire agir G sur ses sous-groupes par conjugaison.]]

2. En déduire qu'il y a un élément de G qui n'est conjugué à aucun élément de H .

[[Raisonnement par l'absurde et utiliser le fait que les sous-groupes conjugués à H ne sont pas disjoints.]]

Exercice 12. Montrer que le groupe $GL_n(\mathbb{R})$ agit sur $M_n(\mathbb{R})$ par $A.M = AMA^{-1}$ où $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et $M \in M_n(\mathbb{R})$. L'action est-elle transitive ? Comment appelle-t-on les orbites ?

Exercice 13. Montrer que le groupe $O(3)$ agit naturellement sur la sphère unité de \mathbb{R}^3 .

- Précisez les orbites.
- Identifier les stabilisateurs.
- Cette action est-elle transitive ? fidèle ?

Exercice 14. 1. Montrer que le groupe $GL_n(\mathbb{R})$ agit sur les vecteurs de \mathbb{R}^n . Décrire les orbites. L'action est-elle transitive, fidèle ?

2. Montrer que l'action sur les vecteurs induit une action bien définie sur les droites de \mathbb{R}^n . Cette action est-elle transitive ? Calculer le noyau de l'action ?

3. Montrer que le groupe $GL_n(\mathbb{R})$ agit naturellement sur l'ensemble des bases de \mathbb{R}^n .

- Précisez les orbites.
- Identifier les stabilisateurs.
- Cette action est-elle transitive ? fidèle ?

3 Espaces euclidiens et hermitiens

Exercice 15. L'espace \mathbb{R}^4 est muni de sa structure euclidienne canonique. Déterminer, dans la base canonique, la matrice de la projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel d'équations

$$\begin{cases} 3x + 2y + z & = 0 \\ x + 2y + 3z + 4t & = 0 \end{cases}$$

Exercice 16. Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On définit l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)t^2 dt \quad \text{pour } P, Q \in E.$$

a) Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E . On notera $\| \cdot \|$ la norme associée.

b) Soit $F = \mathbb{R}_1[X]$ le sous-espace de E formé des polynômes de degré inférieur ou égal à 1. Appliquer le procédé de Schmidt à la base $(1, X)$ de F pour obtenir une base orthonormée (u_0, u_1) de F .

Soit $\pi : E \rightarrow E$ la projection orthogonale sur F . Déterminer $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\pi(X^2) = \alpha_0 u_0 + \alpha_1 u_1.$$

c) En déduire la valeur de $\|\pi(X^2)\|^2$.

d) Calculer

$$\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 t^2 dt.$$

Exercice 17. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1 - Montrer que si $f = f^*$ et $\forall x \in E : \langle x, f(x) \rangle = 0$ alors $f = 0$.

2 - Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- $f \circ f^* = f^* \circ f$.

- $\forall x, y \in E : \langle f(x), f(y) \rangle = \langle f^*(x), f^*(y) \rangle$.

- $\forall x \in E : \|f(x)\| = \|f^*(x)\|$.

3 - Si $\dim(E) = 2$ et si $f \circ f^* = f^* \circ f$ alors la matrice de f dans une

base orthonormée est soit symétrique, soit de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $b \neq 0$.

4 - On suppose désormais que $\dim(E) = 3$ et que $f \circ f^* = f^* \circ f$.

- Montrer que f a au moins une valeur propre réelle qu'on notera λ .

Montrer que E_λ et E_λ^\perp sont stables par f et f^* .

- Montrer que si f n'est pas symétrique, il existe une base orthonormée \mathcal{B}

de E et deux réels a et b (avec $b \neq 0$) tels que $\text{Mat}(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Exercice 18. Soit $(E, | \cdot |)$ un espace vectoriel de dimension n .

1. Soient F et G des sous-espace vectoriels de E . Montrer que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

2. Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E et $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ et H le sous-espace vectoriel de E d'équation cartésienne $\sum_{k=1}^n a_k x_k = 0$ dans \mathcal{B} .

(a) Déterminer l'orthogonale de H .

(b) Déterminer la distance du vecteur $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$ de E au sous-espace vectoriel H .

3. Soit P le sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel \mathbb{R}^4 défini par

$$u = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in P \iff x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0.$$

(a) Déterminer une base de P^\perp puis une base orthonormale de P^\perp .

(b) En déduire une expression analytique de la projection orthogonale de \mathbb{R}^4 sur P .

4 Groupes classiques et réduction

Exercice 19. Soit u appartenant à $L(E)$ et pour tout k appartenant à \mathbb{N} , notons N^k le noyau de u^k et F^k l'image de u^k .

1. Montrer que les N^k forment une suite croissante pour l'inclusion et que $k^0 = \inf\{k \geq 0, \text{ tels que } N_k = N_{k+1}\}$ est bien défini.
2. Montrer que, pour tout $k \geq k_0$, $N_k = N_{k_0}$ et $F_k = F_{k_0}$.
3. Si $k_0 > 0$, montrer que $E = N_{k_0} \oplus F_{k_0}$.
4. Montrer que N_{k_0} et F_{k_0} sont stables par u , que la restriction de u à N_{k_0} est un endomorphisme nilpotent, que la restriction de u à F_{k_0} est un endomorphisme inversible.

Exercice 20. Calculer le polynôme minimal de $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ et préciser si A est diagonalisable en discutant suivant les valeurs de a, b, c .

Exercice 21. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A noté χ_A et le polynôme minimal de A noté μ_A .
2. Réduire en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{X^q}{\mu_A(X)}$
[[On ne cherchera pas à calculer la partie entière (polynômiale) de cette fraction rationnelle.]]

3. Pour tout $q \in \mathbb{Z}$ calculer A^q .

[[Substituer A dans la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle après avoir multiplié par μ_A .]]

Exercice 22. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, montrer que A est nilpotente si et seulement si pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$ on a $\text{tr}(A^k) = 0$.

Exercice 23. 1. Soit $A, B \in GL_n(\mathbb{C})$ et p un entier non nul tel que $B^p = A$. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si B est diagonalisable.

2. Le résultat subsiste-t-il dans $GL_n(\mathbb{R})$?

3. Le résultat de la question 1 est-il vrai si A n'est pas inversible ?

Exercice 24. 1. Soit $A = \begin{pmatrix} -7 & 10 & -2 & 14 \\ -2 & 4 & 0 & 3 \\ -3 & 1 & 3 & 5 \\ -5 & 5 & -1 & 10 \end{pmatrix}$. Déterminer les sous-

espaces propres de A et les sous-espaces caractéristiques de A . Donner la forme de Jordan de A .

2. Mêmes questions avec la matrice $B = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -4 & 8 \\ -3 & 3 & -2 & 6 \\ -4 & 4 & -3 & 8 \\ -1 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

3. Mêmes questions avec la matrice $C = \begin{pmatrix} -7 & 10 & -2 & 12 \\ -2 & 3 & 0 & 3 \\ -3 & 2 & 1 & 5 \\ -4 & 5 & -1 & 7 \end{pmatrix}$

Exercice 25. En discutant suivant les valeurs du paramètre réel α , déterminer la forme réduite de Jordan de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & -(\alpha + 4) & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 26. Classifier à similitude près toutes les matrices nilpotentes de $M_5(\mathbb{C})$. Dans chaque cas préciser les polynômes caractéristiques et minimaux.

Exercice 27. Soit $A \in M_6(\mathbb{C})$ telle que $P_A(X) = (X - 1)^4(X - 2)^2$ et $\Pi_A(X) = (X - 1)^2(X - 2)$. Que peut-on dire des dimensions des espaces propres de A ? Quelles sont les matrices de Jordan possibles pour A ?

Exercice 28. Soit A appartenant à $M_n(\mathbb{C})$, montrer que A est semblable à A^t . On commencera par montrer qu'un bloc de Jordan est semblable à sa transposée en trouvant un changement de base explicite.

Exercice 29. Soit O une matrice de $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que O appartient à $O(n)$ si et seulement si ses vecteurs colonnes sont 2 à 2 orthogonaux et de norme 1.

Exercice 30. En utilisant le procédé d'orthogonalisation de Gram Schmidt montrer que

1. Toute matrice $A \in GL_n(\mathbb{R})$ se décompose de façon unique en $A = UT$ avec $U \in O(n)$ et T triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs.
2. En utilisant la question précédente, montrer que toute matrice de $GL_n(\mathbb{R})$ se décompose de façon unique sous la forme $A = UDP$ avec U orthogonale, D diagonale à coefficients strictement positifs, P triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale. On appelle cette décomposition, la **décomposition d'Iwasawa**.
3. Toute matrice $A \in GL_n(\mathbb{C})$ se décompose de façon unique en $A = UT$ avec $U \in U(n)$ et T triangulaire supérieure à coefficients diagonaux réels et strictement positifs.
4. En déduire que toute matrice de $M_n(\mathbb{C})$ se trigonalise en base orthonormale, c'est-à-dire qu'il existe $U \in U(n)$ et T triangulaire supérieure telles que $A = UTU^{-1}$.

Exercice 31 (Décomposition polaire). .

1. Soit r un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E . On dit que r est positif, si toutes ses valeurs propres sont positives. Montrer que si r est défini positif, il existe un et un seul endomorphisme symétrique s positif tel que $s^2 = r$. On appelle s racine carrée positive de r .
On dit que r est défini positif si et seulement si toutes ses racines sont strictement positives. Montrer que si r est défini positif, alors sa racine positive aussi.

2. Soit f un endomorphisme de E . Montrer que ${}^t f f$ est symétrique et positif. Montrer que si en plus f est bijective, ${}^t f f$ est défini positif.
3. On suppose maintenant que f est une bijection. Soit s la racine carrée positive de ${}^t f f$. Montrer que $u = f \circ s^{-1}$ est une transformation orthogonale. En déduire que tout endomorphisme bijectif de E peut se mettre sous la forme :

$$f = u \circ s$$

ou u est une transformation orthogonale, et s est symétrique défini positif.

Montrer que cette décomposition, appelée décomposition polaire de f est unique.

4. Que se passe-t-il si f n'est pas bijective ?

Exercice 32 (décomposition d'Iwasawa II). On note $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}, \text{Im}(z) \geq 0\}$. Montrer que $SL_2(\mathbb{R})$ agit sur \mathbb{H} par l'action

$$\forall \gamma \in SL_2(\mathbb{R}), \forall z \in \mathbb{H}, \gamma.z = \frac{az + b}{cz + d}.$$

On montrera que l'application Φ qui envoie $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sur l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{H} &\rightarrow \mathbb{H} \\ z &\mapsto \frac{az+b}{cz+d} \end{aligned}$$

est un morphisme de groupes. Quel est le noyau de ce morphisme.

- Quel est le stabilisateur de i ?
- Quelle est l'orbite de i sous l'action de $T^+(\mathbb{R})$, le sous-groupe formé des matrices triangulaires supérieures à coefficients diagonaux strictement positifs ?
- En déduire $SL_2(\mathbb{R}) = T^+(\mathbb{R})SO_2(\mathbb{R})$.

5 Topologie des matrices

Exercice 33. On munit \mathbb{R}^n d'un produit scalaire qui induit une norme sur $M_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $O(n)$ est un groupe compact.

2. Soit D une matrice diagonale, montrer que le groupe engendré par D est compact si et seulement si les valeurs propres de D sont de module 1.
3. Soit G un sous-groupe de $M_n(\mathbb{R})$ contenant $O(n)$. On suppose que G est compact, montrer que $G = O(n)$. On dit que $O(n)$ est un **groupe compact maximal**.

[[Utiliser la réduction polaire et le fait qu'une matrice symétrique définie positive est diagonalisable en base orthonormale et a ses valeurs propres réelles strictement positives.]]

Exercice 34. On appelle $SO(n)$ (ou $O^+(n)$) le sous-ensemble de $O(n)$ formé des matrices de déterminant 1.

1. Montrer que $SO(n)$ est un sous-groupe de $O(n)$ d'indice 2.
2. Montrer que $SO(n)$ est compact.
3. Montrer que $SO(n)$ est connexe par arcs.
[[Utiliser la décomposition des matrices orthogonales et construire un chemin continue partant d'une matrice de $SO(n)$ et aboutissant à la matrice identité.]]

Exercice 35. On munit $M_n(\mathbb{R})$ d'une norme.

1. Montrer que la limite d'une suite convergente de matrices triangulaires supérieures est triangulaire supérieure.
2. Montrer que l'ensemble des matrices trigonalisables est un fermé de $M_n(\mathbb{R})$.
[[On utilisera qu'une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ trigonalisable est trigonalisable en base orthonormale et que $O(n)$ est compact.]]
3. Dédurre de la question précédente que la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

n'est pas limite de matrices diagonalisables sur \mathbb{R} .

Exercice 36. Soit N une matrice nilpotente de $M_n(\mathbb{R})$. On note d son ordre de nilpotence.

1. Montrer que les matrices I, N, \dots, N^{d-1} forment une famille libre de $M_n(\mathbb{R})$.

2. Soit n un entier supérieur à d , calculer $(I+N)^n$ en fonction de I, N, \dots, N^{d-1} .
3. On munit \mathbb{R}^n d'une norme, montrer que la suite $((I + N)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $N = 0$.
[[On pourra compléter la famille I, N, \dots, N^{d-1} en une base de $M_n(\mathbb{R})$ et montrer le résultat pour la norme sup associée à cette base.]]
4. Soit λ appartenant à \mathbb{R}^* . Calculer $(\lambda I + N)^n$ en fonction de $\lambda, I, N, \dots, N^{d-1}$.
5. Montrer que la suite $((\lambda I + N)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 si et seulement si $|\lambda| < 1$.
6. Montrer que la suite $((\lambda I + N)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $\lambda < 1$ ou si $\lambda = \pm 1$ et $N = 0$.

Montrer que $(\lambda I + N)$ est inversible et calculer $(\lambda I + N)^{-1}$. Montrer que $(\lambda I + N)^{-1}$ peut s'écrire sous la forme $\lambda^{-1}I + \hat{N}$ avec \hat{N} nilpotente d'indice inférieur ou égal à d .

En déduire une condition nécessaire et suffisante sur λ et N pour que la famille $((\lambda I + N))_{n \in \mathbb{Z}}$ soit bornée.