

## MA302 — ALGÈBRE LINÉAIRE 2

## TRAVAUX DIRIGÉS

2009–2010

---

SOMMAIRE

1. Sommes directes, projections	2
2. Réduction des endomorphismes	4
3. Dualité	8
4. Espaces préhilbertiens – Espaces euclidiens et hermitiens	11
5. Formes quadratiques, formes hermitiennes	14
6. Un peu de géométrie euclidienne dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$	15
7. Équations différentielles linéaires	16

---

## 1. SOMMES DIRECTES, PROJECTIONS

**Exercice 1.** On considère dans  $\mathbb{C}^3$  les vecteurs  $x_1 = (1, 0, 1)$ ,  $x_2 = (1, i, 3)$  et  $x_3 = (-2, 1, i)$ . Démontrer qu'ils forment une famille libre.

**Exercice 2.** On considère dans  $\mathbb{R}^4$  les vecteurs  $x_1 = (1, 1, 1, 2)$ ,  $x_2 = (0, 2, 0, 0)$ ,  $x_3 = (1, -1, 2, 2)$  et  $x_4 = (1, -1, 2, 3)$ .

- Vérifier que  $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$  est une base de  $\mathbb{R}^4$ .
- Calculer dans la base  $\mathcal{X}$  les composantes des vecteurs de la base canonique de  $\mathbb{R}^4$ .
- Calculer dans la base  $\mathcal{X}$  les composantes d'un élément quelconque de  $\mathbb{R}^4$ .

**Exercice 3 (Partiel).** On considère dans  $\mathbb{R}^3$  les trois vecteurs  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Montrer qu'ils forment une base de  $\mathbb{R}^3$  et exprimer les composantes dans cette base d'un vecteur quelconque de  $\mathbb{R}^3$ .

**Exercice 4.** Soit  $E = \mathbb{R}_n[X]$  l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré  $\leq n$ .

- Soit  $P_0, P_1, \dots, P_n$  des polynômes de  $E$  tels que  $\deg P_k = k$  (pour  $0 \leq k \leq n$ ). Montrer que  $(P_0, P_1, \dots, P_n)$  est une base de  $E$ .
- Soit  $P$  un polynôme de degré  $n$ . Montrer que  $(P, P', \dots, P^{(n)})$  est une base de  $E$ . Soit  $a \in \mathbb{R}$ ; déterminer les composantes du polynôme  $Q$  défini par  $Q(X) = P(X + a)$  dans la base  $(P, P', \dots, P^{(n)})$ .

**Exercice 5.** On considère dans  $\mathbb{R}^4$  les vecteurs  $x_1 = (1, 2, 3, 0)$ ,  $x_2 = (-1, 1, 2, 1)$ ,  $x_3 = (1, 5, 8, 1)$ ,  $y_1 = (0, 3, 5, 1)$ ,  $y_2 = (1, -1, 1, 0)$ ,  $y_3 = (0, 0, 3, 1)$ . On désigne par  $F = \text{Vect}\{x_1, x_2, x_3\}$  le sous-espace engendré par  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$  et par  $G = \text{Vect}\{y_1, y_2, y_3\}$  celui engendré par  $y_1$ ,  $y_2$  et  $y_3$ . Donner une base des sous-espaces suivants:  $F$ ,  $G$ ,  $F \cap G$  et  $F + G$ .

**Exercice 6.** On note  $(e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{C}^3$ . On note  $f$  l'application linéaire de  $\mathbb{C}^3$  dans lui-même telle que  $f(e_1) = (2, 0, 1)$ ,  $f(e_2) = (1, 2i, 1)$ ,  $f(e_3) = (2, \pi, -2)$ . Déterminer les images par  $f$  de  $u_1 = (1, 1, 1)$ ,  $u_2 = (2, -1, 0)$  et  $u_3 = (-3, 0, 2)$ . Déterminer la matrice de  $f$  par rapport à la base canonique de  $\mathbb{C}^3$ .

**Exercice 7.** On rappelle que l'ensemble des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans lui-même est un espace vectoriel pour les opérations usuelles. On considère les quatre fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par les formules

$$\begin{aligned} f_1(x) &= e^x \cos x & f_2(x) &= e^x \sin x \\ f_3(x) &= e^{-x} \cos x & f_4(x) &= e^{-x} \sin x \end{aligned}$$

a) Montrer qu'elles sont linéairement indépendantes. On note  $E$  l'espace vectoriel des combinaisons linéaires de ces quatre fonctions.

b) Montrer que si  $f \in E$  alors  $f' \in E$ . On note  $d$  l'application de  $E$  dans lui-même qui à chaque  $f$  associe  $f'$ . Vérifier que  $d$  est une application linéaire. Déterminer la matrice de  $d$  dans la base  $(f_1, f_2, f_3, f_4)$  de  $E$ .

**Exercice 8.** Soient  $F, G$  deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel  $E$ . On définit l'application  $f : F \times G \rightarrow E$  par  $f(x, y) = x + y$ .

a) Montrer que  $f$  est linéaire.

b) Déterminer le noyau et l'image de  $f$ .

c) Montrer que l'on a équivalence entre :

(i)  $f$  est un isomorphisme,

(ii)  $E = F \oplus G$ ,

(iii)  $E = F + G$  et  $F \cap G = \{0\}$ .

d) On suppose que  $E$  est de dimension finie. Appliquer le théorème du rang à  $f$ .

**Exercice 9.** On suppose que  $\sigma$  est une application continue de  $[0, 1]$  dans lui-même telle que  $\sigma \circ \sigma = I_{[0,1]}$ . Donner un exemple d'une telle application  $\sigma$  différente de  $I_{[0,1]}$ . On note

$$F = \{ f \in C([0, 1], \mathbb{R}) ; f \circ \sigma = f \}$$

$$G = \{ f \in C([0, 1], \mathbb{R}) ; f \circ \sigma = -f \}$$

Montrer que  $C([0, 1], \mathbb{R}) = F \oplus G$ .

**Exercice 10.** Soit  $E = \mathbb{R}^3$ ,  $F = \text{Vect}\{(x, y, z) \text{ tq } x + y + 3z = 0\}$  et  $G = \text{Vect}\{(1, 0, 1)\}$ .

a) Vérifier que  $F \oplus G = E$ .

b) Soit  $s$  la symétrie de noyau  $F$  et de direction  $G$  et soit  $X = \text{Vect}\{(a, b, c)\}$ . Déterminer  $s(X)$ .

**Exercice 11.** Soient  $p, q$  deux projecteurs. Montrer les équivalences :

$$p + q \text{ est un projecteur} \iff p \circ q + q \circ p = 0 \iff \begin{cases} \text{Im}(p) \subset \text{Ker}(q) \\ \text{Im}(q) \subset \text{Ker}(p) \end{cases}$$

Chercher alors le noyau et l'image de  $p + q$ .

**Exercice 12.** On désigne par  $\mathcal{I}$  le sous-espace de  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  des fonctions impaires, et par  $\mathcal{P}$  celui des fonctions paires. Montrer que  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathcal{I} \oplus \mathcal{P}$ . Si  $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , donner la décomposition explicite  $f = f_i + f_p$  avec  $f_i \in \mathcal{I}$  et  $f_p \in \mathcal{P}$ .

## 2. RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES

**Exercice 13.** On considère les deux matrices suivantes,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On considère les trois polynômes

$$P(X) = X^2 + 3X - 2, Q(X) = X^3 - 2X, R(X) = X^4 + X^2 + i.$$

Calculer

$$\begin{aligned} &P(A), Q(A), R(A), P(B), Q(B), R(B), \\ &(P + Q)(B), P(B) + Q(B), P(A + B), P(A) + P(B), \\ &P(AB), P(BA), P(A)P(B), (PQ)(A), (QP)(A), P(A)Q(A), Q(A)P(A). \end{aligned}$$

**Exercice 14.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $f \in \mathcal{L}(E)$  et  $P \in \mathbb{K}[X]$ . Montrer que:

- si  $V$  est un sous-espace stable par  $f$ , alors  $V$  est un sous-espace stable par  $P(f)$ ,
- $\text{Ker}P(f)$  et  $\text{Im}P(f)$  sont stables par  $f$ .

**Exercice 15.** Soit  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Calculer son polynôme caractéristique  $\chi_A(X)$ , puis calculer  $\chi_A(A)$ .
- En déduire que  $A$  est inversible, calculer son inverse.

**Exercice 16.** On considère l'espace  $\mathbb{R}_3[X]$  des polynômes réels de degré au plus 3. Soit  $\phi$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}_3[X]$  donné par

$$\phi(P) = XP''(X).$$

- Calculer  $Q(\phi)$  où  $Q$  est le polynôme  $Q(X) = X^2 - 1$ .
- Calculer le noyau et l'image de  $\phi$ .

**Exercice 17.** Soit  $u$  et  $v$  deux endomorphismes d'un espace vectoriel  $E$  qui commutent ( $u \circ v = v \circ u$ ). Montrer que tout sous-espace propre de  $u$  est stable par  $v$ .

**Exercice 18.** Soit  $f$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie tel que

$$f^4 = f^2 + f.$$

- Montrer que  $\text{Ker}(f^3 - f - \text{Id}) \oplus \text{Ker}f = E$ .

- (2) a) Montrer que  $\text{Im } f \subseteq \text{Ker}(f^3 - f - \text{Id})$ .  
 b) En déduire que  $\text{Im } f = \text{Ker}(f^3 - f - \text{Id})$ .

**Exercice 19.** On considère les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ces matrices sont-elles diagonalisables ? Si oui, les réduire.

**Exercice 20.** On considère la matrice  $A_t = \begin{pmatrix} t & 1 & \dots & 1 \\ 1 & t & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & t \end{pmatrix}$  de  $M_n(\mathbb{C})$ .

- a) Sans calculer le polynôme caractéristique de  $A_t$ , montrer que  $(t - 1)$  est valeur propre.  
 b) Déterminer le sous-espace propre associé.  
 c) Que dire de la multiplicité de la valeur propre  $(t - 1)$  ?  
 d) En déduire le spectre de  $A_t$ .  
 e)  $A_t$  est-elle diagonalisable ?

**Exercice 21.** Soit  $a, b \in \mathbb{C}$ . On considère les matrices:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix}.$$

- (1) Pour cette question uniquement, on suppose que  $a, b \in \mathbb{R}$ . Montrer que  $A$  est diagonalisable.  
 (2) Exprimer  $A$  en fonction de  $a, b, U$  et  $I_4$ .  
 (3) En déduire une expression de  $A^2$  en fonction de  $a, b, U$  et  $I_4$ .  
 (4) En déduire que le polynôme  $Q = X^2 - 2(a + b)X + (a - b)(a + 3b)$  annule  $A$ .  
 (5) Montrer que  $A$  est diagonalisable.  
 (6) Déterminer une matrice  $D \in M_4(\mathbb{C})$  diagonale et une matrice  $P \in GL_4(\mathbb{C})$  telles que:

$$A = PDP^{-1}.$$

**Exercice 22.** Pour quelles valeurs des paramètres  $a, b, c \in \mathbb{C}$  la matrice

$$M = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & b & 2 \\ 0 & 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

est-elle diagonalisable ?

**Exercice 23.** Soit  $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ .

- 1 - Calculer  $M^2$ . En déduire un polynôme annulateur de  $M$ .  $M$  est-elle diagonalisable?
- 2 - Diagonaliser  $M$ .

**Exercice 24.** Soit  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que:

- $a_{ij} > 0$  pour tout  $1 \leq i, j \leq n$
- $\sum_{j=1}^n a_{ij} = 1$  pour tout  $1 \leq i \leq n$ .

- 1 - Montrer que 1 est valeur propre de  $A$ .
- 2 - Montrer que si  $\lambda$  est valeur propre de  $A$ , alors  $|\lambda| \leq 1$ .

**Exercice 25.** Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{C}^3$  dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{bmatrix} 2i+2 & 2i+4 & -i-2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2i+4 & 4i+8 & -i-4 \end{bmatrix}.$$

- 1 - Déterminer le polynôme caractéristique, les valeurs propres et les vecteurs propres de  $f$ .
- 2 - Montrer qu'il existe deux endomorphismes  $g, h$  de  $\mathbb{C}^3$  tels que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f^n = g + (-2)^n h$ . Quelles sont les matrices de  $g$  et  $h$  dans la base canonique?

**Exercice 26** (Partiel). On considère l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^4$  dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Calculer  $\det(A)$ . Que peut-on en déduire sur le spectre de  $A$  ?
- Soit  $P$  le polynôme  $P = X(X-1)^2$ . Calculer  $P(A)$ . En déduire l'égalité

$$\mathbb{R}^4 = \text{Ker} A \oplus \text{Ker}(A - \text{Id})^2.$$

- En déduire le spectre de  $A$ .
- Calculer la dimension et une base des espaces propres de  $A$ .
- Bonus: Calculer  $A^n$ .

**Exercice 27.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , et  $M = \begin{bmatrix} A & 2A \\ A & 2A \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ . On veut déterminer le polynôme caractéristique de  $M$  en fonction de celui de  $A$ .

- 1 - Soit  $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ . Diagonaliser  $B$ .
- 2 - Montrer que  $M$  est semblable à la matrice  $N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3A \end{bmatrix}$ .
- 3 - Calculer  $\chi_M$  en fonction de  $\chi_A$ .

**Exercice 28.** Soit

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$$

telle que  $a + d \neq 0$ . Montrer que toute matrice  $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  qui vérifie  $M^2N = NM^2$  vérifie aussi  $MN = NM$ . On pourra utiliser le théorème de Cayley-Hamilton.

**Exercice 29.** On note  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$  défini par  $u(P) = X^n P(1/X)$ .

- a) Déterminer  $u^2$ , en déduire que  $u$  est diagonalisable.
- b) Déterminer une base de vecteurs propres de  $u$ .

**Exercice 30.** Soit  $M \in M_3(\mathbb{R})$ , telle que  $M \neq Id$  et  $M^3 = Id$ .

- a) Quelles sont les valeurs propres complexes de  $M$  ?
- b) Montrer que  $M$  est semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

**Exercice 31.** Déterminer toutes les matrices  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  qui vérifient  $M^2 - 3M + 2I_2 = 0$ .

**Exercice 32.** Soient  $A \in \mathcal{M}_n(K)$  telle que  $\text{tr}(A) \neq 0$  et

$$f : \mathcal{M}_n(K) \rightarrow \mathcal{M}_n(K), M \mapsto \text{tr}(A)M - \text{tr}(M)A.$$

- (1) Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(K)$ .
- (2) Montrer que  $\mathcal{T} = \{M \in \mathcal{M}_n(K) : \text{tr}(M) = 0\}$  et  $\text{Vect}(A)$  sont des sous-espaces propres de  $f$ .
- (3) En déduire que  $f$  est diagonalisable et donner la matrice de  $f$  dans une base formée de vecteurs propres.

**Exercice 33.** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n \geq 1$  et soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . On suppose qu'il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $f^k = 0$ .

1 - Déterminer le spectre de  $f$ . En déduire que si  $f \neq 0$ , alors  $f$  n'est pas diagonalisable.

2 - On suppose  $f \neq 0$ . Soit  $r \in \mathbb{N}$ ,  $r \geq 1$ , tel que  $f^r = 0$  et  $f^{r-1} \neq 0$ .

- a) Montrer qu'il existe  $x \in E$  tel que  $f^{r-1}(x) \neq 0$ .
- b) Montrer que la famille  $(x, f(x), \dots, f^{r-1}(x))$  est libre.
- c) Soit  $F$  le sous-espace vectoriel de  $E$  engendré par  $(x, f(x), \dots, f^{r-1}(x))$ . Montrer que  $F$  est stable par  $f$ .
- d) Soit  $u$  l'endomorphisme induit par  $f$  sur  $F$ . Donner la matrice de  $u$  dans la base  $(x, f(x), \dots, f^{r-1}(x))$ .

**Exercice 34.** On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

En effectuant le moins de calculs possible:

(1) Montrer que

$$\{0\} \subset \text{Ker}A \subset \text{Ker}A^2 \subset \text{Ker}A^3 = \mathbb{R}^4$$

et déterminer les dimensions respectives de  $\text{Ker}A$  et  $\text{Ker}A^2$ .

(2) Déterminer un vecteur  $e_1$  tel que  $\mathbb{R}^4 = \text{Ker}A^2 \oplus \text{Vect}(e_1)$ .

(3) Montrer que  $(e_1, Ae_1, A^2e_1)$  est une famille libre.

(4) Montrer que  $Ae_1 \in \text{Ker}A^2$ , et que  $\text{Ker}A^2 = \text{Ker}A \oplus \text{Vect}(Ae_1)$ .

(5) Montrer que  $A^2e_1 \in \text{Ker}A$  et déterminer un vecteur  $e_2$  tel que  $\text{Ker}A = \text{Vect}(A^2e_1) \oplus \text{Vect}(e_2)$ .

(6) Montrer que  $(e_1, Ae_1, A^2e_1, e_2)$  est une base de  $\mathbb{R}^4$ .

(7) Soit  $P$  la matrice de passage de la base canonique à la base  $(A^2e_1, Ae_1, e_1, e_2)$ . Calculer  $P^{-1}AP$ .

Adapter ce travail à l'étude de  $B$  et  $C$

**Exercice 35** (Examen). On considère l'ensemble  $\mathcal{A}$  des matrices inversibles  $M$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  qui vérifient:

$$M^{-1} = -\frac{1}{4}(M^2 - M - 4I_n).$$

(1) Déterminer un polynôme  $P \in \mathbb{R}[X]$  de degré 3 tel que toute matrice  $M \in \mathcal{A}$  vérifie  $P(M) = 0$ .

(2) Montrer que  $\mathcal{A} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : P(M) = 0\}$ .

(3) Montrer que si  $M \in \mathcal{A}$ , alors  $\text{Sp}(M) \subset \{1, 2, -2\}$  (où  $\text{Sp}(M)$  désigne le spectre de  $M$ ).

(4) Montrer que toute matrice  $M \in \mathcal{A}$  est diagonalisable.

### 3. DUALITÉ

**Exercice 36.** Soit  $E$  un espace vectoriel non réduit à  $\{0\}$ . Montrer qu'une forme linéaire non nulle définie sur  $E$  est surjective.

**Exercice 37.** a) Montrez que les trois vecteurs suivant forment une base de  $\mathbb{R}^3$ .

$$(1, 2, 4); (0, 1, 1); (1, 1, 1).$$

b) Trouvez la base duale.

**Exercice 38.** Soient  $f_1$  et  $f_2$  les deux applications de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  définies pour chaque  $X = (x, y)$  par  $f_1(X) = x + y$  et  $f_2(X) = x + 2y$ .

- Montrer que  $(f_1, f_2)$  est une base de  $[\mathbb{R}^2]^*$ .
- Exprimer  $f_1$  et  $f_2$  à l'aide de la base duale de la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ .
- Quelles sont dans la base  $(f_1, f_2)$  les composantes des formes linéaires suivantes :  $f(X) = x, g(X) = 2x - 3y$  et  $h(X) = x - y$ .
- Déterminer la base de  $\mathbb{R}^2$  dont  $(f_1, f_2)$  est la base duale.

**Exercice 39.** On note  $C$  l'espace vectoriel réel des suites convergentes de réels et  $C_0$  le sous-espace des suites qui convergent vers 0.

- On note  $\Phi$  l'application de  $C$  dans  $\mathbb{R}$  qui à chaque suite  $x = (x_n)_{n \geq 1}$  associe  $\Phi(x) = \lim_n x_n$ . Montrer que  $\Phi$  est une forme linéaire sur  $C$ . Quel est son noyau?
- Etant donnée une suite  $x = (x_n)_{n \geq 1} \in C$  on lui associe la suite  $y = (y_k)_{k \geq 1}$  définie par  $y_1 = \Phi(x)$  et pour  $k = 1, 2, \dots$   $y_{k+1} = x_k - \Phi(x)$ . Montrer que  $y \in C_0$ . Montrer que l'application  $u : C \rightarrow C_0$  ainsi définie est un isomorphisme.
- On désigne par  $C_{st}$  le sous-espace de  $C$  des suites constantes. Montrer que  $C = C_0 \oplus C_{st}$ .

**Exercice 40.** Dans  $\mathbb{R}^3$  on considère les formes linéaires :  $f_1(x, y, z) = x + 2y + 3z, f_2(x, y, z) = -2z, f_3(x, y, z) = 2x + 2y + 3z$ .

- Montrer que  $(f_1, f_2, f_3)$  est une base de  $(\mathbb{R}^3)^*$ .
- Trouver la base antéduale.

**Exercice 41.** Soit  $E = \mathbb{R}_3[X]$ . On considère les formes linéaires  $f_i : P \mapsto \int_0^1 t^i P(t) dt$  pour  $i = 0 \dots 3$ .

- Montrer que  $(f_0, f_1, f_2, f_3)$  est une base de  $E^*$ .
- Trouver la base antéduale.

**Exercice 42.** Soit  $E = \mathbb{R}_2[X]$  l'espace des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 2. On définit les applications  $\phi, \phi_1, \phi_2, \phi_3$  de  $E$  dans  $\mathbb{R}$  par:

$$\phi(P) = \int_0^1 P(t) dt, \quad \phi_1(P) = P(0), \quad \phi_2(P) = P(1), \quad \phi_3(P) = P'(0), \quad \text{pour tout } P \in E.$$

- Montrer que  $(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$  est une base de  $E^*$ .
- Déterminer la base  $(u_1, u_2, u_3)$  antéduale de  $(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ .
- Montrer qu'il existe des réels  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  tels que  $\phi = \alpha_1 \phi_1 + \alpha_2 \phi_2 + \alpha_3 \phi_3$
  - Montrer que pour tout  $i \in \{1, 2, 3\}, \alpha_i = \int_0^1 u_i(t) dt$ .
  - Calculer  $\alpha_i$  pour tout  $i \in \{1, 2, 3\}$ .

**Exercice 43.** On note  $\mathbb{R}_3[X]$  l'espace vectoriel réel des polynômes à coefficients réels de degré  $\leq 3$ . On rappelle que  $\mathcal{U} = (1, X, X^2, X^3)$  est une base de  $\mathbb{R}_3[X]$ . On considère les quatre formes linéaires  $f_1, f_2, f_3$  et  $f_4$  définies sur  $\mathbb{R}_3[X]$  par

$$f_1(p) = p(0) \quad f_2(p) = p(1) \quad f_3(p) = p'(0) \quad f_4(p) = p'(1).$$

1 - Déterminer les composantes de chacune des formes linéaires  $f_1, f_2, f_3$  et  $f_4$  dans la base duale de la base  $\mathcal{U}$ .

2 - Montrer que  $(f_1, f_2, f_3, f_4)$  est une base de  $[\mathbb{R}_3[X]]^*$ .

3 - Déterminer la base de  $\mathbb{R}_3[X]$  dont  $(f_1, f_2, f_3, f_4)$  est la base duale.

4 - Montrer que l'application linéaire  $\Phi : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}^4$  définie, pour chaque  $p$ , par

$$\Phi(p) = (f_1(p), f_2(p), f_3(p), f_4(p))$$

est un isomorphisme.

5 - On note  $f$  la forme linéaire sur  $\mathbb{R}_3[X]$  définie, pour chaque  $p$  par,  $f(p) = \int_0^1 p(t)dt$ . Déterminer les composantes de  $f$  dans la base  $(f_1, f_2, f_3, f_4)$ .

**Exercice 44.** On note  $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  l'espace vectoriel des suites réelles. A chaque  $\theta \in [\mathbb{R}[X]]^*$ , on associe la suite  $\sigma(\theta) = (\theta(X^n))_{n \geq 0}$ . Montrer que  $\sigma : [\mathbb{R}[X]]^* \rightarrow E$  est un isomorphisme.

**Exercice 45.** Soit un espace vectoriel  $E$  et  $\phi, \psi \in E^*$  deux formes linéaires non nulles. On suppose que  $\text{Ker}\phi \subset \text{Ker}\psi$ .

1 - Montrer que  $\text{Ker}\phi = \text{Ker}\psi$ .

2 - Soit  $a \in E$  tel que  $\phi(a) = 1$ . Montrer que  $\psi = \psi(a)\phi$ . [On pourra écrire un élément de  $E$  comme la somme d'un élément de  $\text{Ker}\phi$  et d'un multiple de  $a$ .]

3 - Application - Soit  $H$  un hyperplan de  $E$ . Montrer que  $\{\phi \in E^* : \phi(x) = 0 \quad \forall x \in H\}$  est une droite de  $E^*$ .

**Exercice 46.** Soit  $E$  l'ensemble des suites  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à termes réels telles que pour tout  $n : u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$ .

a) Montrer que  $E$  est un  $\mathbb{R}$ -ev de dimension finie.

b) Soient  $f_0$  l'application de  $E$  dans  $\mathbb{R}$  telle que  $f_0(u) = u_0$  et  $f_1$  l'application de  $E$  dans  $\mathbb{R}$  telle que  $f_1(u) = u_1 + u_0$ . Trouver la base duale de  $(f_0, f_1)$ .

**Exercice 47.** On considère la matrice  $A = (a_{i,j})$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on définit  $\text{tr}(A)$  comme la somme  $\sum_{i=1}^n a_{i,i}$ .

a) Montrer que  $\text{tr}$  est une forme linéaire.

b) Montrez que pour toutes matrices  $A, B$  on a  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ .

**Exercice 48** (Examen). Soit  $E = \mathbb{R}_2[X]$  l'espace des polynômes réels de degré au plus 2. On considère l'application:

$$\langle , \rangle : E^2 \mapsto \mathbb{R} \\ (P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)tdt.$$

- (1) Montrer que  $\langle , \rangle$  est un produit scalaire sur  $E$ .
- (2) Soit  $P_1 = X^2$ ,  $P_2 = X^2 - \frac{2}{3}$  et  $P_3 = X^2 + X$ . Montrer que  $(P_1, P_2, P_3)$  forme une base de  $E$ .
- (3) Appliquer le procédé d'orthonormalisation de Schmidt à la base  $(P_1, P_2, P_3)$  pour obtenir une base orthonormée  $(e_1, e_2, e_3)$  de  $E$ .
- (4) Soit  $\phi_i$  ( $i \in \{1, 2, 3\}$ ) la forme linéaire sur  $E$  définie par:

$$\phi_i(P) = \langle e_i, P \rangle.$$

Montrer que  $(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$  est une base de  $E^*$ .

- (5) Déterminer la base antéduale de  $(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ .

#### 4. ESPACES PRÉHILBERTIENS – ESPACES EUCLIDIENS ET HERMITIENS

**Exercice 49.** On considère l'application  $\phi$  définie dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$  par  $\phi(A, B) = \text{tr}(t\bar{A}B)$

- a) Montrer que  $\phi$  est un produit scalaire.
- b) Quelle est la norme associée ?
- c) Ecrire l'inégalité triangulaire.

**Exercice 50.** L'espace  $\mathbb{R}^4$  est muni de sa structure euclidienne canonique. Déterminer, dans la base canonique, la matrice de la projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel d'équations

$$\begin{cases} x + 2y + 3z & = & 0 \\ x + 2y + 3z + 4t & = & 0 \end{cases}$$

**Exercice 51.** La matrice  $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$  est-elle la matrice d'un produit scalaire ?

**Exercice 52.** Soit  $E = C([-1, 1], \mathbb{C})$ , l'espace vectoriel des fonctions complexes continues définies sur  $[-1, 1]$ . Pour chaque  $f \in E$ , on définit

$$q(f) = \int_{-1}^1 |f(t)|^2 t^2 e^{-t} dt.$$

- 1 - Montrer que  $q$  est une forme quadratique définie positive.
- 2 - Ecrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité de Minkowski.

**Exercice 53.** 1 - Soient  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C}$ . Montrer que:

$$\left( \sum_{i=1}^n |a_i b_i| \right)^2 \leq \left( \sum_{i=1}^n |a_i|^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n |b_i|^2 \right),$$

$$\left( \sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left( \sum_{i=1}^n |a_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \sum_{i=1}^n |b_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

2 - Soient  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$  tels que  $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ . Montrer que  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \geq n^2$ .

3 - Soient  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ . Montrer que

$$\sum_{i=1}^n x_i \leq \sqrt{n} \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

**Exercice 54.** Soit  $E = \mathbb{R}[X]$ . On définit l'application  $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  par:

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)t^2 dt \quad \text{pour } P, Q \in E.$$

a) Montrer que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire sur  $E$ . On notera  $\| \cdot \|$  la norme associée.

b) Soit  $F = \mathbb{R}_1[X]$  le sous-espace de  $E$  formé des polynômes de degré inférieur ou égal à 1. Appliquer le procédé de Schmidt à la base  $(1, X)$  de  $F$  pour obtenir une base orthonormée  $(u_0, u_1)$  de  $F$ .

Soit  $\pi : E \rightarrow E$  la projection orthogonale sur  $F$ . Déterminer  $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{R}$  tels que

$$\pi(X^2) = \alpha_0 u_0 + \alpha_1 u_1.$$

c) En déduire la valeur de  $\|\pi(X^2)\|^2$ .

d) Calculer

$$\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_{-1}^1 (t^2 - at - b)^2 t^2 dt.$$

**Exercice 55.** Soit  $\mathbb{R}^3$  muni de sa structure euclidienne,  $a$  un vecteur et  $\alpha, \beta, \gamma$  trois réels. Résoudre  $\alpha \langle x, x \rangle + \beta \langle x, a \rangle + \gamma = 0$ .

**Exercice 56.** Soient  $E$  un espace hermitien et  $u$  un endomorphisme de  $E$ .

1 - Montrer que  $u^* \circ u$  ne possède que des valeurs propres  $\geq 0$ .

2 - On note  $\lambda$  la plus petite valeur propre et  $\mu$  la plus grande valeur propre de  $u^* \circ u$ . Montrer que, pour chaque  $x \in E$ , on a  $\lambda \|x\|^2 \leq \|u(x)\|^2 \leq \mu \|x\|^2$ .

**Exercice 57 (Partiel).** On considère l'espace vectoriel  $E$  des fonctions continues définies sur  $[0; 2\pi]$  et à valeurs dans  $\mathbb{C}$ . On définit alors l'application  $\phi$  sur  $E * E$  par

$$(f, g) \mapsto \phi(f, g) = \int_0^{2\pi} \overline{f(t)} g(t) dt.$$

- Montrer que  $\phi$  définit un produit scalaire sur  $E$ .
- Ecrire l'inégalité de Cauchy Schwarz.
- Les deux fonctions 1 et cos sont elles orthogonales pour  $\phi$  ?
- Trouver une BON du sous-espace de  $E$  engendré par ces deux fonctions.

**Exercice 58.** L'espace  $\mathbb{R}^4$  est muni de sa structure euclidienne canonique. On note  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^4$  représenté dans la base canonique par la matrice

$$A = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} -1 & -4 & 4 & -4 \\ -4 & 5 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & 5 & 2 \\ -4 & -2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

- 1 - Justifier l'existence d'une base orthonormale par rapport à laquelle  $u$  est représenté par une matrice diagonale.
- 2 - Déterminer une base orthonormale par rapport à laquelle  $u$  est représenté par une matrice diagonale.

**Exercice 59.** Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien et  $f \in \mathcal{L}(E)$ .

- 1 - Montrer que si  $f = f^*$  et  $\forall x \in E : \langle x, f(x) \rangle = 0$  alors  $f = 0$ .
- 2 - Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i)  $f \circ f^* = f^* \circ f$ .
- (ii)  $\forall x, y \in E : \langle f(x), f(x) \rangle = \langle f^*(x), f^*(x) \rangle$ .
- (iii)  $\forall x \in E : \|f(x)\| = \|f^*(x)\|$ .

3 - Si  $\dim(E) = 2$  et si  $f \circ f^* = f^* \circ f$  alors la matrice de  $f$  dans une base orthonormée est soit symétrique, soit de la forme  $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$  avec  $b \neq 0$ .

4 - On suppose désormais que  $\dim(E) = 3$  et que  $f \circ f^* = f^* \circ f$ .

- a) Montrer que  $f$  a au moins une valeur propre réelle qu'on notera  $\lambda$ . Montrer que  $E_\lambda$  et  $E_\lambda^\perp$  sont stables par  $f$  et  $f^*$ .
- b) Montrer que si  $f$  n'est pas symétrique, il existe une base orthonormée  $\mathcal{B}$  de  $E$  et deux réels  $a$  et  $b$  (avec  $b \neq 0$ ) tels que  $\text{Mat}(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ .

**Exercice 60.** Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  espace euclidien. On désigne par  $\|\cdot\|$  la norme associée au produit scalaire. Soit  $v \in E$  un vecteur non nul, et  $\lambda \in \mathbb{R}$  un scalaire. On considère l'endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  défini par:

$$u(x) = x + \lambda \langle x, v \rangle v \quad \text{pour tout } x \in E.$$

- (1) a) Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Rappeler la caractérisation de l'adjoint de  $f$ .
- b) Montrer que  $u$  est autoadjoint.

- (2) a) Soit  $x \in E$ . Calculer  $\|u(x)\|^2$ .  
 b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $\lambda$  et  $v$  pour que  $u$  soit un endomorphisme orthogonal.
- (3) a) Soit  $f \in \mathcal{O}(E)$ . Montrer que le spectre de  $f$  est inclus dans l'ensemble  $\{-1, 1\}$ .  
 b) On suppose que  $u \in \mathcal{O}(E)$  et que  $\lambda \neq 0$ . Montrer que le spectre de  $u$  est l'ensemble  $\{-1, 1\}$  si  $\dim E \geq 2$ . Donner une interprétation géométrique de  $u$ .

## 5. FORMES QUADRATIQUES, FORMES HERMITIENNES

**Exercice 61** (Formule de polarisation). Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel,  $q$  une forme quadratique sur  $E$  et  $\phi$  une forme hermitienne sur  $E$  telle que pour tout  $x \in E$ ,  $q(x) = \phi(x, x)$ . Pour tout  $x, y \in E$ , développer  $q(x+y)$ ,  $q(x-y)$ ,  $q(x+iy)$ ,  $q(x-iy)$ . En déduire que la forme hermitienne  $\phi$  est unique, caractérisée par:

$$\phi(x, y) = \frac{1}{4}(q(x+y) - q(x-y) + iq(x-iy) - iq(x+iy))$$

pour tout  $x, y \in E$ .

**Exercice 62.** On considère les applications suivantes:

- (i)  $q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$   
 $(x, y) \mapsto 2x^2 + y^2$
- (ii)  $q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$   
 $(x, y) \mapsto xy$
- (iii)  $q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$   
 $(x, y, z) \mapsto 3xz + y^2$
- (iv)  $q : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$   
 $(x, y) \mapsto 3x\bar{y} + 3\bar{x}y + |z|^2$
- (v)  $q : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$   
 $(x, y, z, t) \mapsto xy + yz + zt + tx$
- (vi)  $q : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$   
 $(x, y, z) \mapsto x\bar{x} + |y|^2 + \bar{z}z + \bar{x}y + x\bar{y} - y\bar{z} - i\bar{y}z$
- (vii)  $q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$   
 $(x, y, z) \mapsto x^2 - 2y^2 + 2xy + yz$ .

1 - Dans chaque cas, montrer que  $q$  est une forme quadratique (pour cela, on explicitera la forme polaire  $\phi$  associée  $\ddagger q$ ).

2 - Donner la matrice  $M$  de  $q$  dans la base canonique. A partir de  $M$ , déterminer le rang de  $q$ , déterminer le noyau  $\text{Ker}q$ . Est-ce que  $\text{Ker}q$  est égal au cône isotrope  $C_q$ ?

3 - Dans les cas (i) et (ii), on peut faire facilement un dessin: tracer des courbes de niveau  $q(x, y) = a$  pour  $a \in \mathbb{R}$ ; pour  $a = 0$ , qu'obtient-on? La terminologie *cône* pour le cône isotrope est-elle "bien choisie"? Faire un dessin dans le cas (iii).

4 - Donner une décomposition en carrés de la forme  $q$  (on utilisera l'algorithme de Gauss). En déduire la signature de  $q$ . Retrouver le rang de  $q$ . Déterminer les cas où  $\phi$  est un produit scalaire.

**Exercice 63.** Soit  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

- 1 - Montrer que  $q(A) = \det(A)$  est une forme quadratique.
- 2 - Déterminer sa signature.

**Exercice 64.** Soient  $E = \mathbb{R}_2[X]$  l'espace des fonctions polynômiales réelles de degré inférieur ou égal à 2 et  $q$  l'application de  $E$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $q(P) = P'(0)P(1)$ .

- 1 - Montrer que  $q$  est une forme quadratique sur  $E$ .
- 2 - Déterminer la matrice de  $q$  dans la base canonique de  $E$ .
- 3 - Déterminer  $E^\perp$ . En déduire le rang de  $q$ .
- 4 - Déterminer le cône isotrope  $C_q$  de  $q$ . Déterminer une base de  $E$  formée de vecteurs isotropes.  $C_q$  est-il un sous-espace vectoriel de  $E$  ?
- 5 - Déterminer une base  $q$ -orthogonale. En déduire la signature de  $q$ .

**Exercice 65.** On considère la forme quadratique:

$$q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) \mapsto (x + 4y - z)^2 + (3x - 2y + 2z)^2 + (7x + 3z)^2.$$

Donner la signature et le rang de  $q$ .

## 6. UN PEU DE GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE DANS $\mathbb{R}^2$ ET $\mathbb{R}^3$

**Exercice 66.** On considère les matrices suivantes:

$$(i) A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(ii) A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(iii) A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- 1 - Dans chaque cas, repérer les propriétés remarquables de la matrice  $A$  (est-elle autoadjointe? est-ce une isométrie?).
- 2 - Lorsque c'est possible, diagonaliser la matrice  $A$  dans une base orthonormale.
- 3 - Dans les cas (ii) et (iii), reconnaître la transformation de  $\mathbb{R}^3$  représentée par la matrice  $A$ .

**Exercice 67.** 1 - Compléter la matrice  $A = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 & 3 & . \\ -2 & 6 & . \\ 3 & . & . \end{pmatrix}$  en une matrice orthogonale positive.

- 2 - Reconnaître l'application de matrice  $A$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

**Exercice 68.** Soit  $A = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ .

- (1) a) Justifier que  $A$  est diagonalisable dans une base orthonormée.  
 b) Déterminer une matrice  $O \in SO_2(\mathbb{R})$  et une matrice  $D \in M_2(\mathbb{R})$  diagonale telles que:

$$A = OD^tO.$$

- c) On note  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ . Déterminer et tracer l'ensemble  $\mathcal{E}$  des points  $X$  de  $\mathbb{R}^2$  vérifiant l'équation:

$${}^tXAX = 1.$$

- (2) La matrice  $A$  est-elle la matrice d'un produit scalaire?

**Exercice 69.** On fixe un repère orthonormé de  $\mathbb{R}^2$ . Tracer les courbes d'équations:

- (i)  $13x^2 - 32xy + 37y^2 - 2x + 14y - 5 = 0$   
 (ii)  $xy + 3x + 5y - 4 = 0$   
 (iii)  $(2x + 3y)^2 + 4x + 6y - 5 = 0$

**Exercice 70.** On fixe un repère orthonormé de  $\mathbb{R}^2$ . Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la courbe d'équation:

$$mx^2 + 4mx + (m - 1)y^2 + 2 = 0.$$

On discutera selon la valeur de  $m \in \mathbb{R}$ .

## 7. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

**Exercice 71.** Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x(t) + 2y(t) + 2z(t) \\ \frac{dy}{dt} = x(t) + 3y(t) + 2z(t) \\ \frac{dz}{dt} = -x(t) - y(t) - z(t) \end{cases}$$

Donner toutes les solutions qui satisfont  $x(0) = 1$ ,  $y(0) = 2$ ,  $z(0) = -1$ .

**Exercice 72.** Soit  $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  et  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  canoniquement associé à  $A$ .

- a) Montrer que  $A$  n'est pas diagonalisable.  
 b) Cherchez deux vecteurs propres de  $A$  linéairement indépendants.  
 c) Complétez les en une base de  $\mathbb{R}^3$ .  
 d) Résoudre le système  $X' = AX$ .

**Exercice 73.** Transformer chaque équation différentielle (linéaire scalaire du second ordre) suivante en un système différentiel linéaire du premier ordre:

$$(1) \quad y'' + 4y' + 3y = 0,$$

$$(2) \quad y'' - 6y' + 9y = 0,$$

$$(3) \quad y'' - 2y' + 2y = 0.$$

Résoudre les systèmes ainsi obtenus.

**Exercice 74.** On considère l'équation différentielle suivante:

$$(E) : \quad x^2 y'' - 2y = x,$$

et l'équation homogène associée:

$$(E_0) : \quad x^2 y'' - 2y = 0.$$

- a) Déterminer une solution polynômiale  $y_1$  de l'équation  $(E_0)$ .
- b) Calculer le Wronskien de l'équation  $(E_0)$ .
- c) En utilisant  $y_1$  et le Wronskien, déterminer une solution  $y_2$  de l'équation  $(E_0)$  linéairement indépendante de  $y_1$ .
- d) Déterminer une solution particulière  $y_0$  de l'équation  $(E)$ . On pourra éventuellement utiliser la méthode de la variation de la constante.
- e) Donner la solution générale de l'équation  $(E)$ .