

M7 - EXAMEN SESSION 1

LICENCE MI - SEMESTRE 3 - 2006-07

Jeudi 11 janvier 2007

ÉNONCÉ

Exercice 1

Soit $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \frac{t^2}{e^t - 1}$, $t > 0$.

- (a) Montrer que f est bornée sur $]0, +\infty[$.
(b) Montrer que $f(t) \sim t$ pour t au voisinage de 0. En déduire que l'intégrale généralisée $\int_0^1 f(t)dt$ est convergente.
(c) Montrer que $f(t) \sim t^2 e^{-t}$ au voisinage de $+\infty$. En déduire que l'intégrale généralisée $\int_1^\infty f(t)dt$ est convergente.
- (a) Montrer que pour tout $n \geq 1$ et tout $t \in]0, +\infty[$, on a

$$f(t) = \frac{t^2 e^{-t}}{1 - e^{-t}} = \sum_{k=1}^n t^2 e^{-kt} + \frac{t^2 e^{-(n+1)t}}{1 - e^{-t}} = \sum_{k=1}^n t^2 e^{-kt} + f(t) e^{-nt}.$$

On pose dans la suite $r_n(t) = f(t) e^{-nt}$, $t \in]0, +\infty[$.

- (b) Montrer que pour tout $n \geq 1$, l'intégrale généralisée $I_n = \int_0^\infty r_n(t)dt$ est convergente et que $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$; on pourra s'aider de la question 1.(a).
(c) Montrer que pour tout $k \geq 1$, l'intégrale généralisée $\int_0^\infty t^2 e^{-kt} dt$ est convergente. Calculer sa valeur pour tout $k \geq 1$.
- Montrer que

$$\int_0^\infty \frac{t^2}{e^t - 1} dt = 2 \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^3}.$$

Exercice 2

Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. On définit la fonction f 2π -périodique sur \mathbb{R} par $f(t) = \cos at$ si $t \in]-\pi, \pi]$.

- (a) Donner l'allure du graphe de f sur $[-2\pi, 2\pi]$.
(b) Calculer les coefficients de Fourier $(a_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n(f))_{n \geq 1}$ de f .
Indication : on pourra utiliser la formule de trigonométrie

$$\cos u \cos v = \frac{1}{2}(\cos(u+v) + \cos(u-v)).$$

- (c) Montrer que les séries $\sum a_n(f)$ et $\sum b_n(f)$ sont absolument convergentes.

2. On note pour $t \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$

$$s_n(f)(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k(f) \cos kt + b_k(f) \sin kt).$$

- (a) Montrer que la suite de fonctions $(s_n(f))_{n \geq 1}$ converge uniformément sur \mathbb{R} ; déterminer sa limite.
 (b) En appliquant le résultat ci-dessus au point π , montrer que

$$\cos(a\pi) = \frac{\sin a\pi}{a\pi} - \frac{2a}{\pi} \sin a\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - a^2}.$$

3. (a) Montrer que

$$\frac{1}{u} - \frac{1}{\tan u} = \frac{u}{3} + \frac{u^3}{45} + u^3 \varepsilon(u)$$

avec $\varepsilon(u) \xrightarrow[u \rightarrow 0]{} 0$.

Indication : développer $\tan u$ au voisinage de 0 à l'ordre 5.

(b) Montrer que

$$\lim_{a \rightarrow 0} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - a^2} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

et que

$$\lim_{a \rightarrow 0} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k^2 - a^2)} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}.$$

- (c) Appliquer le développement limité du 3.(a) à $u = a\pi$ en vous reportant à la formule trouvée au 2.(b). Montrer alors, en prenant la limite lorsque a tend vers 0 que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

(d) Avec le même raisonnement qu'au (c), montrer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

CORRIGÉ

Exercice 1

1.(a) Tout d'abord, il est clair que pour $t > 0$, $f(t) \geq 0$. D'autre part, pour $t > 0$, on a $e^t - 1 \geq t$. Ainsi, pour $t > 0$, $f(t) \leq t$, c'est-à-dire que $0 \leq f(t) \leq 1$ pour $t \in]0, 1]$. Ensuite, on a aussi $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2}{e^t - 1} = 0$. Ainsi, il existe $A > 0$ tel que pour tout $t > A$, on a $0 \leq f(t) \leq 1$. Enfin, comme f est continue sur $[1, A]$, f est bornée sur cet intervalle. Finalement, f est bornée sur \mathbb{R} .

(b) Au voisinage de 0, on a $e^t - 1 \sim t$. Ainsi, $f(t) \sim t$ pour t au voisinage de 0. On peut alors prolonger f par continuité en lui donnant la valeur 0 en 0. L'intégrale sur $[0, 1]$ de f est égale à l'intégrale du prolongement de f sur $[0, 1]$: f est donc intégrable sur $[0, 1]$.

(c) Au voisinage de $+\infty$, on a $e^t - 1 \sim e^t$. Ainsi, $f(t) \sim t^2 e^{-t}$ pour t au voisinage de $+\infty$. Comme l'intégrale de $t \mapsto t^2 e^{-t}$ est convergente sur $[1, +\infty[$, il en est de même pour l'intégrale de f sur $[1, +\infty[$.

2.(a) On a pour tout $t > 0$ et pour tout $n \geq 1$

$$\begin{aligned} f(t) &\stackrel{(1)}{=} \frac{t^2 e^{-t}}{1 - e^{-t}} \\ &\stackrel{(2)}{=} t^2 e^{-t} \left(\sum_{k=0}^{n-1} (e^{-t})^k + \frac{e^{-nt}}{1 - e^{-t}} \right) \\ &\stackrel{(3)}{=} \sum_{\ell=1}^n t^2 e^{-\ell t} + \frac{t^2 e^{-(n+1)t}}{1 - e^{-t}} \\ &\stackrel{(4)}{=} \sum_{\ell=1}^n t^2 e^{-\ell t} + f(t) e^{-nt}. \end{aligned}$$

L'égalité (1) est obtenue en multipliant numérateur et dénominateur par e^{-t} . L'égalité (2) provient de la somme de la série géométrique (pour k allant de 0 à $n-1$) de raison $0 \leq e^{-t} < 1$ car $t > 0$. L'égalité (3) est obtenue en distribuant le facteur $t^2 e^{-t}$ dans la parenthèse et dans la somme, puis en faisant le changement d'indice $\ell = k + 1$ dans la somme. Enfin, la dernière égalité (4) est obtenue en multipliant numérateur et dénominateur du dernier terme par e^t .

(b) Comme f est bornée sur $]0, +\infty[$ (notons M la borne supérieure de $|f|$), on a

$$|f(t)e^{-nt}| \leq M e^{-nt}, \quad t > 0.$$

Comme l'intégrale de $t \mapsto e^{-nt}$ sur $]0, +\infty[$ est convergente, il en est de même pour l'intégrale I_n de r_n sur $]0, +\infty[$ par comparaison et on a

$$\left| \int_0^{+\infty} r_n(t) dt \right| \leq M \int_0^{+\infty} e^{-nt} dt = \frac{M}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

(c) On a pour tout $k \geq 1$, et pour tout $x > 0$

$$\begin{aligned}
 \int_0^x t^2 e^{-kt} dt &\stackrel{(1)}{=} \left[-\frac{1}{k} t^2 e^{-kt} \right]_0^x + \frac{2}{k} \int_0^x t e^{-kt} dt \\
 &\stackrel{(2)}{=} -\frac{1}{k} x^2 e^{-kx} + \frac{2}{k} \left(\left[-\frac{1}{k} t e^{-kt} \right]_0^x + \frac{1}{k} \int_0^x e^{-kt} dt \right) \\
 &\stackrel{(3)}{=} -\frac{1}{k} x^2 e^{-kx} - \frac{2}{k^2} x e^{-kx} - \frac{2}{k^3} \left[e^{-kt} \right]_0^x \\
 &\stackrel{(4)}{=} -\frac{1}{k} x^2 e^{-kx} - \frac{2}{k^2} x e^{-kx} - \frac{2}{k^3} e^{-kx} + \frac{2}{k^3} \\
 &\stackrel{(5)}{\xrightarrow{x \rightarrow +\infty}} \frac{2}{k^3}
 \end{aligned}$$

L'égalité (1) est obtenue en intégrant par parties (on dérive $t \mapsto t^2$ et on intègre $t \mapsto e^{-kt}$). L'égalité (2) est obtenue en intégrant encore une fois par parties (on dérive $t \mapsto t$ et on intègre $t \mapsto e^{-kt}$). L'égalité (3) est obtenue en intégrant $t \mapsto e^{-kt}$ entre 0 et x . Enfin, la convergence (5) provient du fait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-kx} = 0$,

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-kx} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-kx} = 0$. Cela prouve que l'intégrale de $t \mapsto t^2 e^{-kt}$ sur $[0, +\infty[$ est convergente et que

$$\int_0^{+\infty} t^2 e^{-kt} dt = \frac{2}{k^3}.$$

3. D'après l'expression de f trouvée au 2.(a), comme toutes les intégrales sont convergentes (et que l'on a une somme finie), on a

$$\begin{aligned}
 \int_0^{+\infty} f(t) dt &\stackrel{(1)}{=} \sum_{\ell=1}^n \int_0^{+\infty} t^2 e^{-\ell t} dt + \int_0^{+\infty} r_n(t) dt \\
 &\stackrel{(2)}{=} \sum_{\ell=1}^n \frac{2}{\ell^3} + I_n \\
 &\stackrel{(3)}{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty}} 2 \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\ell^3}.
 \end{aligned}$$

L'égalité (1) vient du fait qu'une somme finie de fonctions intégrables est intégrable et que son intégrale généralisée est la somme des intégrales généralisées. L'égalité 2 vient de l'expression trouvée au 2.(c) pour $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-kt} dt$ et de $\int_0^{+\infty} r_n(t) dt = I_n$. Enfin, la convergence (3) vient du fait que la série $\sum \frac{1}{\ell^3}$ est convergente (série de Riemann avec $\alpha = 3 > 1$) et que $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$. Comme l'expression de $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ est indépendante de n , on en conclut donc que

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{e^t - 1} dt = 2 \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\ell^3}.$$

Exercice 2

1.(a) En remarquant que $\cos(-\pi a) = \cos \pi a$, on voit que la fonction f est continue sur \mathbb{R} .

(b) Comme f est une fonction paire, les coefficients $b_n(f)$, $n \geq 1$ sont tous nuls. D'autre part, on a

$$a_0(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos at dt = \frac{2 \sin a\pi}{a\pi}$$

et pour $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
 a_n(f) &\stackrel{(1)}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos at \cos nt dt \\
 &\stackrel{(2)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(n+a)t + \cos(n-a)t) dt \\
 &\stackrel{(3)}{=} \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2 \sin(n+a)\pi}{n+a} + \frac{2 \sin(n-a)\pi}{n-a} \right) \\
 &\stackrel{(4)}{=} \frac{1}{\pi} \left(\frac{(-1)^n}{n+a} \sin a\pi - \frac{(-1)^n}{n-a} \sin a\pi \right) \\
 &\stackrel{(5)}{=} -\frac{2a \sin a\pi}{\pi} \frac{(-1)^n}{n^2 - a^2}.
 \end{aligned}$$

La première égalité vient directement de la définition des coefficients de Fourier d'une fonction intégrable. La deuxième égalité utilise la formule de trigonométrie donnée dans l'énoncé. L'égalité (3) est obtenue en intégrant $t \mapsto \cos(n+a)t$ et $t \mapsto \cos(n-a)t$ sur $[-\pi, \pi]$: comme $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $n+a \neq 0$ et $n-a \neq 0$ pour tout entier $n \geq 1$. L'égalité (4) provient du fait que $\sin(\theta + n\pi) = (-1)^n \sin \theta$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. Enfin, la dernière égalité est obtenue en réduisant au même dénominateur les deux termes de la somme.

(c) Comme les $b_n(f)$, $n \geq 1$, la série de ces coefficients est absolument convergente. D'autre part on a pour tout $n \geq 1$

$$|a_n(f)| \leq \frac{2|a|}{|n^2 - a^2|}.$$

Pour n au voisinage de $+\infty$, on a $\frac{2|a|}{|n^2 - a^2|} \sim \frac{2|a|}{n^2}$, et comme la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente (série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$), il en est de même par comparaison pour la série $\sum |a_n(f)|$. Ainsi, la série $\sum a_n(f)$ est absolument convergente.

2.(a) Comme la série des coefficients de Fourier de f converge absolument, la série de Fourier de f converge normalement, et donc uniformément, sur \mathbb{R} . En effet, pour tout $k \geq 1$, on a

$$|a_k(f) \cos kt + b_k(f) \sin kt| \leq |a_k(f)|$$

et $|a_k(f)|$ est le terme général d'une série convergente d'après la question 1.(c). D'autre part, on sait que pour une fonction continue, \mathcal{C}^1 par morceaux (ce qui est le cas ici), la série de Fourier de f converge simplement vers f (Théorème de Dirichlet). Ainsi, comme la limite simple coïncide avec la limite uniforme, on a $(s_n(f))_{n \geq 1}$ converge uniformément vers f sur \mathbb{R} .

(b) D'après ce qui précède, on a donc que $(s_n(f)(\pi))_{n \geq 1}$ converge vers $f(\pi) = \cos a\pi$. Ce qui donne donc puisque $\cos k\pi = (-1)^k$,

$$\begin{aligned}
 \cos a\pi &= \frac{\sin a\pi}{a\pi} - \frac{2a \sin a\pi}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2 - a^2} \cos k\pi \\
 &= \frac{\sin a\pi}{a\pi} - \frac{2a \sin a\pi}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - a^2}.
 \end{aligned}$$

3.(a) Pour u au voisinage de 0, on a

$$\tan u = u + \frac{u^3}{3} + \frac{2u^5}{15} + u^6 \varepsilon(u),$$

avec $\varepsilon(u) \xrightarrow{u \rightarrow 0} 0$. Ainsi, cela nous donne

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tan u} &= \frac{1}{u + \frac{u^3}{3} + \frac{2u^5}{15} + u^6\varepsilon(u)} \\ &= \frac{1}{u} \frac{1}{1 + \frac{u^2}{3} + \frac{2u^4}{15} + u^5\varepsilon(u)}. \end{aligned}$$

En posant $v = \frac{u^2}{3} + \frac{2u^4}{15} + u^5\varepsilon(u)$ et en faisant le développement limité de $v \mapsto \frac{1}{1+v}$ à l'ordre 2 au voisinage de 0, on obtient

$$\frac{1}{\tan u} = \frac{1}{u} \left(1 - \frac{u^2}{3} - \frac{u^4}{45} + u^4\delta(u) \right)$$

où $\delta(u) \xrightarrow{u \rightarrow 0} 0$. Ainsi, cela nous donne

$$\frac{1}{u} - \frac{1}{\tan u} = \frac{u}{3} + \frac{u^3}{45} - u^3\delta(u).$$

(b) La série de fonctions $\sum g_n$ avec $g_n(a) = \frac{1}{n^2 - a^2}$, $a \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, est normalement convergente, donc uniformément convergente sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. En effet, $|g_n(a)| \leq \frac{1}{n^2 - \frac{1}{4}}$ pour tout $a \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $n \geq 1$, et $\sum \frac{1}{n^2 - \frac{1}{4}}$ est une série convergente. On a donc

$$\lim_{a \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - a^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

De la même manière, la série de fonctions $\sum h_n$ avec $h_n(a) = \frac{1}{n^2(n^2 - a^2)}$, $a \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, est normalement convergente, donc uniformément convergente sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. En effet, $|h_n(a)| \leq \frac{1}{n^2(n^2 - \frac{1}{4})}$ pour tout $a \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $n \geq 1$, et $\frac{1}{n^2(n^2 - \frac{1}{4})} \sim \frac{1}{n^4}$ est le terme général d'une série convergente. On a donc

$$\lim_{a \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k^2 - a^2)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}.$$

(c) En multipliant par $-\frac{1}{\sin a\pi}$ la formule du 2.(b), on obtient

$$\frac{1}{a\pi} - \frac{1}{\tan a\pi} = \frac{2a}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - a^2},$$

ce qui donne compte tenu du développement limité trouvé au 3.(a) (appliqué à $u = a\pi$)

$$\frac{a\pi}{3} + \frac{a^3\pi^3}{45} - a^3\pi^3\delta(a\pi) = \frac{2a}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - a^2}.$$

En multipliant cette égalité par $\frac{\pi}{2a}$, on obtient

$$(1) \quad \frac{\pi^2}{6} + \frac{a^2\pi^4}{90} - \frac{a^2\pi^4}{2}\delta(a\pi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - a^2}.$$

En utilisant (1), on obtient alors $\frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

(d) En retranchant $\frac{\pi^2}{6}$ à l'égalité (1), on obtient

$$(2) \quad \frac{a^2\pi^4}{90} - \frac{a^2\pi^4}{2}\delta(a\pi) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^2 - a^2} - \frac{1}{k^2} \right).$$

Pour tout $k \geq 1$ et $a \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, on a

$$\frac{1}{k^2 - a^2} - \frac{1}{k^2} = \frac{a^2}{k^2(k^2 - a^2)},$$

ce qui donne, une fois reporté dans (2) et après avoir divisé par a^2 ($a \neq 0$)

$$\frac{\pi^4}{90} - \frac{\pi^4}{2} \delta(a\pi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k^2 - a^2)}.$$

Comme dans la question précédente, en prenant à droite et à gauche la limite lorsque a tend vers 0, on obtient

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$